الدكتور
حسن سلوطه
استاذ في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
جامعة دمشق

الرياضيات «٤»

الطبعة الخامسة

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

منشورات جامعة دمشق

١٤١٥ - ١٤١٦ هـ
١٩٩٥ - ١٩٩٦ م

الدكتور
حسن سلوطه
أستاذ في جامعة دمشق
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

الرياضيات

(٤)

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لجامعة دمشق

المقدمة

لقد تم تأليف هذا الكتاب وفق مفردات المنهاج المعتمد لمقرر الرياضيات (٤) الذى يدرس في الفصل الثاني من السنة الثانية في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية بجامعة دمشق ، وقد اتبع فيه اسلوب الشرح المقتضب والمبسط للنظرى والشرح التفصيلي لطرق الحل ، كما يتضمن تطبيقات هندسية عديدة ٠

يتألف الكتاب من باب التحليل الشعاعي وباب التحليل العقدى ، ويتضمن ٧٩ مثالا محلولا و ٥٦ مسألة غير محلولة مع اجوبتها ٠

هذا وقد اوردت في هذا الكتاب قائمة بالمراجع والمصطلحات العلمية لكتابي الرياضيات (٣) و الرياضيات (٤) ٠

المؤلف

مفردات المنهاج المقرر

آ ـ التحليل الشعاعي :

١ ـ المشتقات الشعاعية : التابع العددي او الشعاعي للموضع ـ تدرج وتفرق ودوران تابع للموضع ـ قواعد الاشتقاق ـ المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية وخواصها .

٢ ـ التكاملات الشعاعية : نظريات غوص وستوكس وغرين ـ علاقة غرين وتكامل غوص والزاوية المجسمة .

٣ ـ تطبيقات : ايجاد معادلات تحريك مائع مثالي ومعادلة الايصال الحراري ومعادلات لابلاس وبواسون في الكهرطيسية الساكنة ومعادلات مكسويل ونتائجها في الالكترودیناميك .

ب ـ التحليل العقدي :

١ ـ العدد العقدي والمتحول العقدي : الاشكال المختلفة للعدد العقدي وتمثيله وخواصه ـ المجموعات النقطية والمتحول العقدي .

٢ ـ التوابع العقدية واشتقاقها وتكاملها : التوابع العقدية واشتقاقها ـ التوابع التحليلية وخواصها ـ دراسة التوابع الاساسية ـ التكامل العقدي ـ نظرية وصيغ كوشي التكاملية .

٣ ـ السلاسل العقدية : السلاسل غير المنتهية وتقاربها ـ نشر تايلور ـ نشر لورنت ـ تصنيف النقاط الشاذة .

٤ ـ نظرية الرواسب : حساب التكامل العقدي بطريقة الرواسب ـ حساب تكاملات حقيقية باستخدام النظرية .

٥ ـ التطبيقات وتمثيلها : التابع العقدي والتطبيق ـ التابع التحليلي والتقابل ـ تمثيلهما ـ التطبيق المطابق وخواصه ـ بعض التطبيقات العامة .

الباب الأول

التحليل الشعاعي

١ ـ المشتقات الشعاعية

١ ـ ١ التابع العددي والتابع الشعاعي للموضع

اذا قابل كل نقطة P من نطاق فراغي $\mathcal{D}$ العدد (U (P فنقول ان (U (P هو تابع عددي للموضع في $\mathcal{D}$ (أو تابع نقطي عددي أو حقل عددي) ، أما اذا قابلها الشعاع (**F** (P فنقول إن (**F** (P هو تابع شعاعي للموضع (أو تابع نقطي شعاعي أو حقل شعاعي) . ان كثافة جسم غير متجانس أو درجة حرارته في لحظة ما هي أمثلة على التوابع العددية للموضع ، أما الحقل الكهربائي الساكن أو سرعة مائع متحرك في لحظة ما فهي أمثلة على التوابع الشعاعية للموضع .

ان هذين التعريفين مستقلان عن النظام الاحداثي الذي نستخدمه ، وبما أن الموضع في الفراغ يتعين بثلاثة احداثيات فان U , **F** هي دوماً توابع لثلاثة متحولات مستقلة وفي النظام الديكارتي لدينا :

$$U = U(x, y, z)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\,\hat{i} + F_y(x, y, z)\,\hat{j} + F_z(x, y, z)\,\hat{k}$$

فمثلا الاحداثي الكروي r هو التابع العددي للموضع :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

وشعاع الموضع **r** هو التابع الشعاعي للموضع :

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ملاحظات :

أولا) تنطبق التعاريف نفسها على الحالة الخاصة التي يكون فيها النطاق مستوياً وفي النظام الديكارتي يكون عندئذ :

$$U = U(x, y)$$

$$\mathbf{F} = F_x(x, y)\hat{i} + F_y(x, y)\hat{j}$$

ثانياً) لقد درسنا شروط وجود مشتقات توابع الموضع $\mathbf{F}, U$ بالنسبة لمتحول عددي ، كما درسنا قواعد اشتقاقها ومفاضلتها . أما في دراستنا للمشتقات الشعاعية من المرتبة الاولى (التدرج والتفرق والدوران) فاننا سنقتصر على توابع الموضع ذات المشتقات الاولى المستمرة في $\mathcal{D}$ وفي المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية سنقتصر على توابع الموضع ذات المشتقات الثانية المستمرة في $\mathcal{D}$ بحيث تكون المشتقات الشعاعية الجديدة التي ندرسها هنا موجودة ومستمرة في $\mathcal{D}$.

١ - ٢ المشتقات الموجهة لتابع عددي للموضع وتدرج التابع

١ - ٢ - ١ سطوح السوية

ليكن U تابعاً عددياً للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$. في كل نقطة $P \in \mathcal{D}$ يمكن رسم سطح تكون قيمة U في كل نقطة من نقاطه ثابتة ، وتساوي قيمة U في P . يدعى هذا السطح بسطح سوية التابع في P وهذا السطح وحيد اذ لو مر من P سطحا سوية مختلفان لوجدت للتابع U قيمتان مختلفتان في P وهذا غير ممكن حسب تعريف التابع .

ان سطوح تساوي الحرارة في جسم ساخن أو سطوح تساوي الكمون في وسط

مشحون كهربائياً بشحنات ساكنة هي أمثلة على سطوح السوية . في النظام الديكارتي تكون معادلة سطح السوية هي :

$$U(x, y, z) = C$$

حيث C هو ثابت ومن الشروط المفروضة على مشتقاته يتضح أنه سطح صقيل ان لم تنعدم المشتقات الاولى في النقطة نفسها ومثال ذلك سطوح سوية الاحداثي الكروي r وهي كرات مركزها O .

١ - ٢ - ٢ المشتقات الموجهة

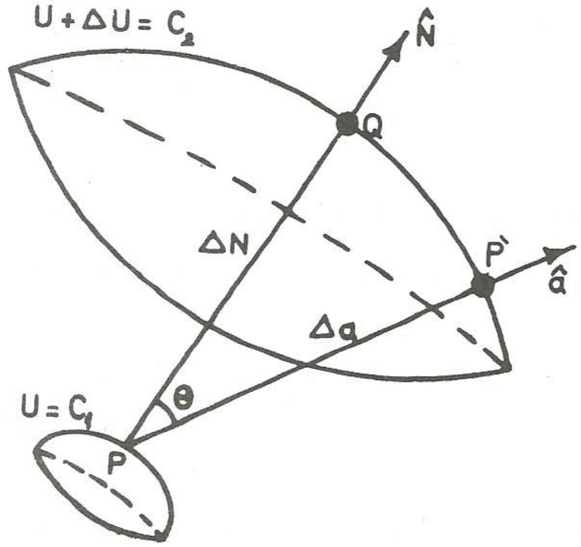
ان التابع العددي للموضع U هو تابع لثلاثة متحولات مستقلة ، وان المشتق الجزئي لهذا التابع بالنسبة لاحد متحولاته في نقطة ما من $\mathcal{D}$ هو المشتق الموجه للتابع وفق شعاع توجيه المماس في النقطة لمنحن تثبت عليه قيم المتحولين الاخرين .

في النظام الديكارتي لدينا : $U(x, y, z)$ و $\frac{\partial U}{\partial x}$ هو المشتق الموجه للتابع U وفق شعاع التوجيه $\hat{i}$ لمحور x (وهو محور تثبت عليه قيمتا y , z) وكذلك الأمر بالنسبة للمشتقين $\frac{\partial U}{\partial z}$ ، $\frac{\partial U}{\partial y}$.

نركز فيما يلي على مشتق موجه خاص يدعى تدرج التابع .

١ - ٢ - ٣ تدرج التابع

اذا كان C_1 ، C_2 ثابتين فان الشكل (١) يبين سطح السوية $U = C_1$ المار من النقطة $P \in \mathcal{D}$ وسطح السوية $U + \Delta U = C_2$ المار من نقطة مجاورة لها P' . اذا



الشكل (١)

قسنا المسافات على المنحى $P\,P'$ بدءاً من P بواسطة المتحول a واذا قسنا المسافات على الناظم في P لسطح السوية $U = C_1$ بواسطة المتحول N فيكون $\overline{P\,P'} = \Delta a$ ويكون $\overline{P\,Q} = \Delta N$ حيث Q هي النقطة التي يلاقي فيها الناظم المشار إليه سطح السوية $U + \Delta U = C_2$. اذا اقتربت P' من P على المستقيم $P\,P'$ فان :

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\partial U}{\partial a}$$

هو مشتق التابع في P الموجه وفق شعاع التوجيه $\hat{a}$ (الشكل ١) كما أنه عندما تقترب Q من P على المستقيم $P\,Q$ فان :

$$\lim_{\Delta N \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta N} = \frac{\partial U}{\partial N}$$

هو مشتق التابع في P الموجه وفق شعاع التوجيه $\hat{N}$ (الشكل ١) .

يتميز $\frac{\partial U}{\partial N}$ عن المشتقات الموجهة الأخرى في P بأنه أكبرها قيمة لأن :

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \lim_{\Delta a \to 0} \left[\left(\frac{\Delta U}{\Delta N} \right) \left(\frac{\Delta N}{\Delta a} \right) \right] = \frac{\partial U}{\partial N} \cos \theta \qquad (1.2.1)$$

حيث θ هي الزاوية بين PQ , PP' (الشكل ١) وبما أن $|\cos \theta| \leqslant 1$ فان $\left|\frac{\partial U}{\partial a}\right| < \left|\frac{\partial U}{\partial N}\right|$ ولا يتساوى هذان المشتقان الا اذا انطبق PP' على PQ .

يدعى التابع الشعاعي $\hat{N} \frac{\partial U}{\partial N}$ بتدرج التابع U في النقطة P ويرمز له بالرمز :

$$\nabla U = \text{grad } U$$

وبما أن ∇U موجود في كل نقطة $P \in \mathcal{D}$ فنقول إنه تدرج التابع في النطاق $\mathcal{D}$.

يجب أن نلاحظ أن ∇U هو شعـــاع موجه وفق شعاع التوجيه $\hat{N}$ اذا كانت طويلته غير منعدمة ، أما اذا انعدمت طويلته فان توجيه ∇U غير معين .

- يتضح من العلاقة (1.2.1) أن المشتق $\frac{\partial U}{\partial a}$ وفق شعاع التوجيه $\hat{a}$ هو مركبة الشعاع $\nabla U = \hat{N} \frac{\partial U}{\partial N}$ على شعاع التوجيه $\hat{a}$ أي أن :

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \hat{a} \cdot (\nabla U) \qquad (1.2.2)$$

- من تعريف التدرج يتضح أنه مستقل عن النظام الاحداثي الذي نستخدمـــه وفي النظام الديكارتي لدينا :

$$\hat{N} = \cos \alpha \, \hat{i} + \cos \beta \, \hat{j} + \cos \gamma \, \hat{k}$$

حيث γ , β , α زوايا توجيه الناظم فيكون :

$$(1.2.3) \qquad \nabla U = \hat{N}\frac{\partial U}{\partial N}$$

$$= \hat{i}\left(\cos\alpha\frac{\partial U}{\partial N}\right) + \hat{j}\left(\cos\beta\frac{\partial U}{\partial N}\right) + \hat{k}\left(\cos\gamma\frac{\partial U}{\partial N}\right)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

١ – ٢ – ٤ المؤثر الاشتقاقي الموجه ∇

من العلاقة (1 . 2 . 3) ينتج أن :

$$(\nabla)U = \left(\hat{N}\frac{\partial}{\partial N}\right)U = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U$$

أي أن : ///

$$(1.2.4) \qquad \nabla \equiv \hat{N}\frac{\partial}{\partial N} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

هو مؤثر اشتقاقي موجه ، اذا أثر على التابع العددي للموضع U فانه يشتقه ويوجهه في آن واحد للحصول على تدرج التابع . يدعى هـــذا المؤثر del أو nabla أو مؤثر هاميلتون .

ملاحظات :

أولا) ان ∇ يؤثر فقط على تابع للموضع وليس على تابع لكل من الموضع والزمن مثلا ، فاذا كان لدينا $W = W(x, y, z, t)$ حيث t هو الزمن فان ∇W لا معنى له الا في لحظة زمنية معينة .

ثانيا) ان ∇ ثنائي الوظيفة فهو يشتق ويوجه في آن واحد . ومن وظيفته

الاشتقاقية يتضح أن $\nabla U \neq U \nabla$ وكذلك من وظيفته التوجيهية يتضح أنه شعاع ينطبق عليه ما ينطبق على الأشعة من جمع وضرب فمثلا $\nabla \cdot \mathbf{a}$ هو الجداء الداخلي للشعاعين $\mathbf{a}$, ∇ بينما $\mathbf{a} \cdot \nabla$ لا معنى له و $(\nabla \wedge \mathbf{a})$ هو الجداء الخارجي للشعاعين ∇ و $\mathbf{a}$. ان الوظيفتين الاشتقاقية والتوجيهية تتجليان بوضوح في الشكل :

$$\nabla \equiv \hat{N} \frac{\partial}{\partial N}$$

حيث $\frac{\partial}{\partial N}$ يمثل الوظيفة الاشتقاقية ، و $\hat{N}$ يمثل الوظيفة الشعاعيـة ، ولكن في مسألة ما ننتقي أحد الشكلين المعرفين في العلاقة (4 . 2 . 1) .

ثالثا) توجد مؤثرات اشتقاقية موجهة أخرى فمثلا :

$$U \nabla = \hat{N} U \frac{\partial}{\partial N}$$

هو مؤثر اشتقاقي موجه وفق شعاع التوجيه $\hat{N}$ و $(\hat{a} \cdot \nabla)$ هو مؤثر اشتقاقي موجه وفق شعاع التوجيه :

$$\hat{a} = \hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma$$

وذلك لأن :

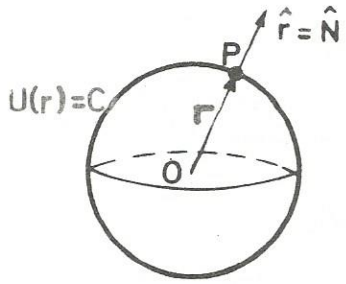
$$\hat{a} \cdot (\nabla U) =$$

$$(\hat{i} \cos \alpha + \hat{j} \cos \beta + \hat{k} \cos \gamma) \cdot (\hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= \cos \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial U}{\partial z}$$

ثالثا) تأثير ∇ على تابع للاحداثي الكروي r فقط :

ان كل سطح من سطوح سوية التابع U (r) ينتج من وضع U (r) = C حيث C هو ثابت وفي هذه الحالة يكون سطح السوية كرة مركزها O ويكون شعاع توجيه الناظم $\hat{N}$ في كل نقطة منها منطبقاً على $\hat{r}$ حيث r هو شعاع موضع نقطة ما P من السطح (الشكل ٢) .



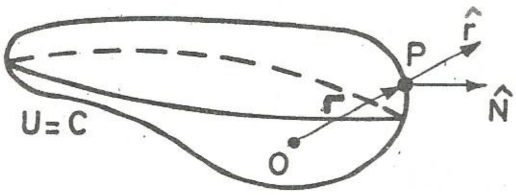
الشكل (٢)

في هذه الحالة ينتج :

$$\nabla U = \hat{N} \frac{\partial U}{\partial N} = \hat{r} \frac{dU}{dr} \qquad (1.2.5)$$

وقد استخدم رمز الاشتقاق الكلي في المشتق الأيمن ، لأن U تابع للمتحول r فقط .

يجب أن نلاحظ أنه في الحالة العامة لا ينطبق $\hat{r}$ على $\hat{N}$ في كل نقطة (الشكل ٣) وذلك لأن سطوح سوية تابع ما ليست كرات .



الشكل (٣)

١ – ٣ تفرق ودوران تابع شعاعي للموضع

ليكن F تابعاً شعاعياً للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$.

ان الجداء الداخلي للمؤثر الاشتقاقي الموجه ∇ بالتابع $\mathbf{F}$ يدعى تعريفاً بتفرق (أو تباعد) التابع $\mathbf{F}$ في $\mathcal{D}$ ويرمز له بالرمز :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

ويجب أن نلاحظ أن الناتج هو تابع عددي للموضع وأنه مستقل عن النظـــام الاحداثي المستخدم ، وفي النظام الديكارتي لدينا :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{i}\,F_x + \hat{j}\,F_y + \hat{k}\,F_z\right)$$

أي أن :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (1.3.1)$$

أما الجداء الخارجي للمؤثر ∇ بالتابع $\mathbf{F}$ فيدعى تعريفاً بدوران (أو اعصار) التابع $\mathbf{F}$ في $\mathcal{D}$ ويرمز له بالرمز :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

ويجب أن نلاحظ أن الناتج هنا تابع شعاعي للموضع وأن توجيهـــه معين ما لم تنعدم طويلته ، كما أنه مستقل عن النظام الاحداثي المستخدم ، وفي النظام الديكارتي لدينا :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (1.3.2)$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

وفي الشكل المعيني من العلاقة (1.3.2) يجب أن نلاحظ أن :

$$\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial z}$$

(وهي المركبات الديكارتية للمؤثر ∇) يجب أن تسبق مركبات الشعاع لتشتقها.

ان تفرق F ودورانه موجودان ومستمران في $\mathcal{D}$ لأن F ذو مشتقات أولى مستمرة في $\mathcal{D}$ فرضاً .

١ – ٤ قواعد الاشتقاق

نستخدم القواعد التالية لايجاد تدرج أو تفرق أو دوران تراكيب تحوي على توابع عددية وشعاعية للموضع . اذا كان u , v تابعين للموضع فان :

أولا) $\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{v} + u(\nabla \cdot \mathbf{v})$

ثانيا) $\nabla \wedge (u\mathbf{v}) = (\nabla u) \wedge \mathbf{v} + u(\nabla \wedge \mathbf{v})$

ثالثاً) $\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})$

رابعا) $\nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} +$

$$\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

خامساً) $\nabla(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{v} +$

$$\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

البرهان : يتم برهان القاعدة الأولى كما يلي :

$$\mathbf{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$u\mathbf{v} = (u v_x)\hat{i} + (u v_y)\hat{j} + (u v_z)\hat{k}$$

$$(i) \qquad \nabla . (u\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(u v_x)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(u v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(u v_z)$$

$$= u\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} v_x + \frac{\partial u}{\partial y} v_y + \frac{\partial u}{\partial z} v_z$$

ومن قانون حساب التفرق لدينا :

$$(ii) \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla . \mathbf{v}$$

ومن قانون حساب التدرج لدينا :

$$\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u$$

فيكون :

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} v_x + \frac{\partial u}{\partial y} v_y + \frac{\partial u}{\partial z} v_z = (\nabla u) . \mathbf{v}$$

بتعويض (ii) , (iii) في (i) ينتج المطلوب .

بالطريقة نفسها يمكن برهان القواعد الأخرى .

١ – ٥ المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية

بما أن U , **F** تابعان للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$ فان المشتقات الشعاعية من المرتبة الاولى :

التدرج ∇U والتفرق $\nabla . \mathbf{F}$ والدوران $\nabla \wedge \mathbf{F}$

هي أيضاً توابع للموضع واذاأثرنا عليها بالمؤثر الاشتقاقي الموجه ∇ تنتج المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية التالية :

أولا) تفرق التدرج :

أي :

$$(1.5.1a) \qquad \begin{cases} \nabla . (\nabla U) = (\nabla . \nabla) U = \nabla^2 U \\ \text{div grad } U = \text{Lap } U \end{cases}$$

حيث $\nabla . \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \text{Lap}$ هو مؤثر اشتقاقي غير موجه يدعى مؤثر لابلاس وهو مستقل عن النظام الاحداثي الذي نستخدمه وفي النظام الديكارتي يكون :

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) .$$

$$\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

أي :

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.5.1b)$$

ومنه فان :

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (1.5.1c)$$

نتائج :

– بوضع $\nabla^2 U = 0$ تنتج معادلة لا بلاس ، ويدعى كل تابع يحققها في النطـــاق $\mathcal{D}$ بتابع توافقي في $\mathcal{D}$.

– بما أن ∇^2 هو مؤثر اشتقاقي غير موجه فيمكن أن يؤثر أيضاً على تابع شعاعي $\mathbf{F}$ ونحصل على :

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2} = \text{Lap}\, \mathbf{F} \qquad (1.5.1d)$$

على أن نلاحظ أن :

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{F} \neq \nabla \cdot (\nabla \mathbf{F})$$

لأن $\nabla \mathbf{F}$ غير معرف .

ثانياً) دوران التدرج :

أي :

$$\begin{cases} \nabla \wedge (\nabla U) \equiv 0 \\ \text{rot grad } U \equiv 0 \end{cases} \qquad (1.5.2a)$$

وقد استخدم رمز المطابقة للدلالة على انعدام التركيب أياً كان التابع U .

البرهان : إن :

$$\nabla U = \hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z}$$

ومن قانون حساب الدوران ينتج :

$$\nabla \wedge (\nabla U) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right)$$

$$+ \hat{k} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) \equiv 0$$

وذلك لأن U فرضاً تابع ذو مشتقات ثانية مستمرة في $\mathcal{D}$ وترتيب الاشتقاق عندئذ لا أهمية له .

نتيجة :

ليكن U , **F** تابعين للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$. في هذا النطاق اذا كان :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{F} = \nabla U & (\mathbf{F} \in Cl^1) \\ \nabla \wedge \mathbf{F} = 0 & \end{array} \right. \quad (1.5.2b)$$

فان :

إذ ضمن هذه الشروط يكون $U \in Cl^2$ في $\mathcal{D}$ وينتج أن :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \nabla \wedge (\nabla U) = 0$$

يمكن البرهان أن العكس صحيح اذا كان $\mathcal{D}$ نطاقاً بسيط الاتصال أي أنـــه اذا كان :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \quad , & (\mathbf{F} \in Cl^1) \\ \mathbf{F} = \nabla U & \end{array} \right. \quad (1.5.2c)$$

فان :

يدعى التابع **F** في هذه الحالة بشعاع كموني في $\mathcal{D}$ (أو غير اعصاري أو محافظ) ويدعى التابع U كمونه العددي .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $\nabla^2 U = 0$ في $\mathcal{D}$ فان

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = 0 \quad (1.5.2d)$$

ويمكن أن نعبر عن هذه النتيجة كما يلي :

نقول عن تابع شعاعي الموضع إنه شعاع كموني اذا كان مساوياً لتـــدرج تابع عددي الموضع ، ويدعى التابع العددي بالكمون العددي للشعاع الكموني .

ان الشروط اللازمة والكافية لكي يكون شعاع كمونيا في نطاق بسيط الاتصال هي انعدام دورانه واستمرار مشتقاته الاولى في هذا النطاق .

ينعدم تفرق الشعاع الكموني اذا كان كمونه العددي تابعا توافقيا .

ملاحظة : اذا كان B ثابتا اختياريا فان $\mathbf{F} = \nabla(U + B) = \nabla U$ أي أن $U + B$ هو أيضا كمون عددي للشعاع الكموني $\mathbf{F}$ وقد عرفنا الكمون العددي أعلاه بإهمال الثابت الاختياري B .

ثالثا) **تفرق الدوران :**

أي :

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) \equiv 0 \\ &\text{div} \;\; \text{rot}\,\mathbf{F} \equiv 0 \end{aligned}\right. \qquad (1.5.3a)$$

وقد استخدم رمز المطابقة للدلالة على انعدام التركيب أيا كان التابع $\mathbf{F}$.

البرهان : من قانون حساب الدوران ، ثم التفرق نحصل على :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\equiv 0$$

وذلك لأن **F** فرضاً ذو مشتقات ثانية مستمرة في $\mathcal{D}$ وترتيب الاشتقاق عندئـذ لا أهمية له .

نتيجة :

ليكن **A** , **F** تابعين للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$. في هذا النطاق اذا كان :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad , & (\mathbf{F} \in Cl^1) \\ \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 & \end{array}\right. \qquad (1 \cdot 5 \cdot 3\,b)$$

فان :

إذ ضمن هذه الشروط يكون $\mathbf{A} \in Cl^2$ في $\mathcal{D}$ وينتج أن :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$$

يمكن البرهان أن العكس صحيح أي اذا كان :

$$\left\{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0 & (\mathbf{F} \in Cl^1) \\ \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{A} & \end{array}\right. \qquad (1 \cdot 5 \cdot 3\,c)$$

فان :

يدعى التابع **F** في هذه الحالة بشعاع لولبي في $\mathcal{D}$ ويدعى التابع **A** كمونه الشعاعي .

يمكن أن نعبر عن هذه النتيجة كما يلي :

- نقول عن تابع شعاعي للموضع إنه شعاع لولبي اذا كان مساوياً لدوران تابع شعاعي آخر للموضع ، ويدعى التابع الآخر بالكمون الشعاعي للشعاع اللولبي .

- ان الشروط اللازمة والكافية لكي يكون شعاع لولبياً في نطاق هي انعدام تفرقه واستمرار مشتقاته الاولى في هذا النطاق .

ملاحظات :

ـ اذا كان U تابعاً عددياً اختيارياً للموضع فان :

$$\mathbf{F} = \nabla \wedge (\mathbf{A} + \nabla U)$$

$$= \nabla \wedge \mathbf{A} + \nabla \wedge (\nabla U) = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

أي أن $\mathbf{A} + \nabla U$ هو أيضاً كمون شعاعي للشعاع اللولبي **F** وقد عرفنا الكمون الشعاعي أعلاه باهمال التدرج الاختياري ∇U .

ـ اذا كان **F** شعاعاً كمونياً ولولبياً في آن واحد فهو تدرج لتابع عددي توافقي U وذلك لأن :

$\mathbf{F} = \nabla U$ (الشعاع كموني)

$\nabla . \mathbf{F} = 0$ (الشعاع لولبي)

بتعويض العلاقة الاولى في الثانية ينتج :

$$\nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U = 0$$

أي أن U تابع توافقي .

رابعاً) **دوران الدوران وتدرج التفرق** ، ويرتبطان بالعلاقة :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{F}) = \nabla (\nabla . \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \\ \text{rot} \quad \text{rot}\, \mathbf{F} = \text{grad div}\, \mathbf{F} - \text{Lap}\, \mathbf{F} \end{array} \right. \qquad (1.5.4)$$

أي :

البرهان :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} & -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ان مسقط هذا التركيب على محور السينات هو :

$$\hat{i}\left[\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right] =$$

$$\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\right] =$$

$$\hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2(\hat{i}\,F_x)$$

بالطريقة نفسها نبرهن أن المسقطين الآخرين هما :

$$\hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2(\hat{j}\,F_y) \quad ، \quad \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2(\hat{k}\,F_z)$$

ويكون التركيب الكلي :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{F}) = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(\nabla . \mathbf{F}) -$$

$$\nabla^2(\hat{i}\,F_x + \hat{j}\,F_y + \hat{k}\,F_z)$$

$$= \nabla(\nabla . \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

١ ـ ٦ التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي في الاحداثيات المنحنية المتعامدة

لقد رأينا أن الجملة :

$$(1.6.1)\quad \begin{cases} x = G_1(u,v,w)\ ,\ y = G_2(u,v,w)\ ,\ z = G_3(u,v,w) \\ J_1 = \dfrac{\partial(x\ y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0\ ,\ G_1\ ,\ G_2\ ,\ G_3 \in C1^1 \end{cases}$$

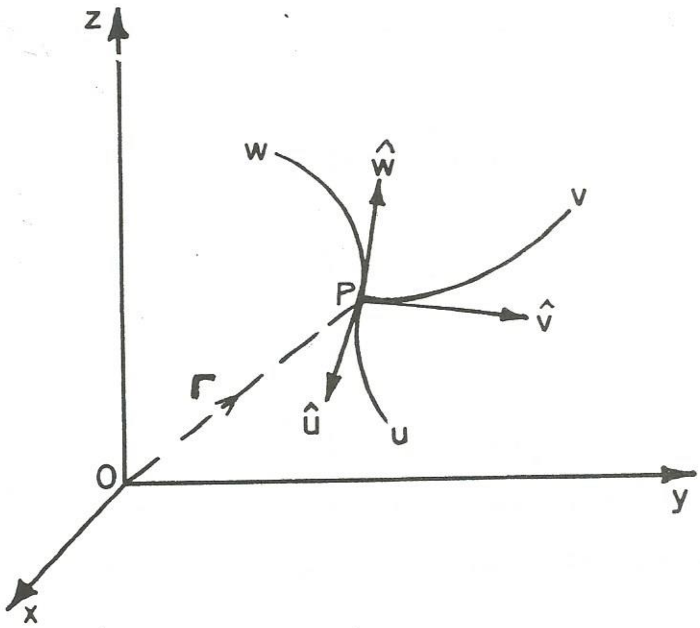
حيث يكون : في نطاق

تعرف تبديلا موضعيـــاً مستمر المشتقات بين النطاق وصورته في الفراغ نفسه x , y , z بحيث تبدل الاحداثيات الديكارتية لنقطة $P(x,y,z)$ بالاحداثيات المنحنية للنقطة نفسها $P(u,v,w)$ ويمكن التعبير عن التبديل (١ ・ ٦ ・ ١) شعاعياً بالعلاقة :

$$(1 \cdot 6 \cdot 2)\qquad \mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = G_1(u,v,w)\hat{i} +$$

$$G_2(u,v,w)\hat{j} + G_3(u,v,w)\hat{k}$$

ان المنحني الذي تتحول عليه قيمة u فقط يدعى منحني الاحداثي u وبالطريقـة نفسها نعرف منحني الاحداثي v ومنحني الاحداثي w وهذه المنحنيات تتقـــاطع في النقطة المتحولة P (الشكل ٤) .



الشكل (٤)

من العلاقة (1 . 6 . 2) ينتج :

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \qquad (1 . 6 . 3)$$

حيث $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ هو شعاع مماس لمنحني الاحداثي u في النقطة P ونرمز لشعاع توجيهه بالرمز $\hat{u}$ فيكون :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \hat{u}\, h_u$$

حيث $h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|$ هو مقياس الاحداثي u .

وبفرض $\hat{v}$, $\hat{w}$ شعاعي توجيه المماسين في P للمنحنيين الاحداثيين الآخرين يكون :

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \hat{v}\, h_v$ حيث $h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ هو مقياس الاحداثي v

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \hat{w}\, h_w$ حيث $h_w = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right|$ هو مقياس الاحداثي w .

بتعويض هذه النتائج في (1 . 6 . 3) ينتج :

$$d\mathbf{r} = \hat{u}\, h_u\, du + \hat{v}\, h_v\, dv + \hat{w}\, h_w\, dw \qquad (1 \cdot 6 . 4)$$

ان التوجيهات $\hat{i}\,,\hat{j}\,,\hat{k}$ لمحاور الاحداثيات الديكارتية هي توجيهات ثابتة ولكن $\hat{u}\,,\hat{v}\,,\hat{w}$ هي توجيهات متغيرة بتغير موضع النقطة P واذا كانت $\hat{u}\,,\hat{v}\,,\hat{w}$ متعامدة فان (u , v , w) هي الاحداثيات المنحنية المتعامدة للنقطة P (الشكل ٤) .

نورد فيما يلي قوانين التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي على الترتيب في الاحداثيات المنحنية المتعامدة لتابعي الموضع F , U في نطاق $\mathcal{D}$ حيث :

$$\mathbf{F}(u, v, w) = [\hat{u} F_u + \hat{v} F_v + \hat{w} F_w] \in C^{1^2} \quad ,$$

$$U(u, v, w) \in C^{1^2} \quad , \quad h_u h_v h_w \neq 0$$

$$(\nabla) U = \left(\frac{\hat{u}}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{v}}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{w}}{h_w} \frac{\partial}{\partial w} \right) U \qquad (1 . 6 . 5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right] \qquad (1 \cdot 6 . 6)$$

$$(1.6.7) \qquad \nabla \wedge \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix}$$

$$(1.6.8) \qquad \nabla^2 U = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial U}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial U}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial U}{\partial w} \right) \right]$$

البرهان : نكتفي ببرهان قانون التدرج .

رأينا أن :

$$(i) \qquad dU = \nabla U . \mathbf{dr}$$

كما أن :

$$(ii) \qquad dU = \frac{\partial U}{\partial u} du + \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial w} dw$$

نفرض أن :

$$(iii) \qquad \nabla U = \hat{u} \lambda_u + \hat{v} \lambda_v + \hat{w} \lambda_w$$

حيث λ_u ، λ_v ، λ_w تراكيب يجب تعيينها .

بتعويض (iii) , (ii) , (1.6.4) في (i) ينتج بالمطابقة بين أمثـال التفاضلات نفسها أن :

$$\lambda_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial U}{\partial u} \quad , \quad \lambda_v = \frac{1}{h_v} \frac{\partial U}{\partial v} \quad , \quad \lambda_w = \frac{1}{h_w} \frac{\partial U}{\partial w}$$

وبتعويض الناتج الاخير في العلاقة (iii) ينتج القانون (1.6.5) .

حالات خاصة :

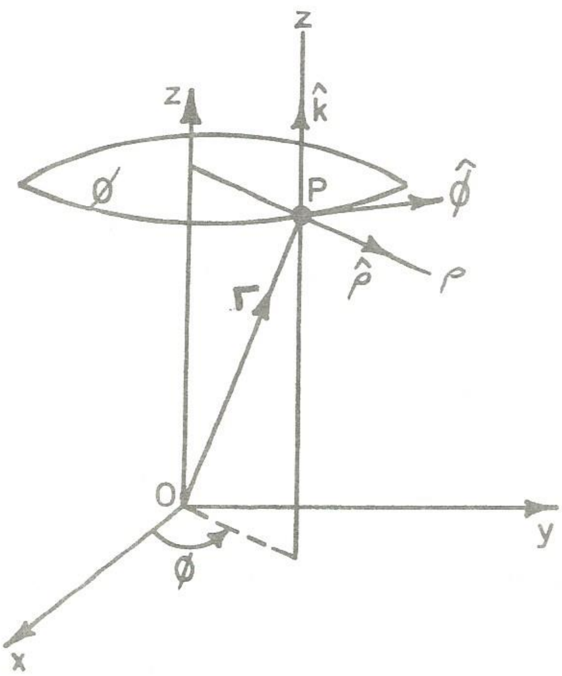
أولا) الاحداثيات الاسطوانية :

وهنا :

$$u = \rho \quad , \quad v = \Phi \quad , \quad w = z$$

$$\hat{u} = \hat{\rho} \quad , \quad \hat{v} = \hat{\Phi} \quad , \quad \hat{w} = \hat{k}$$

ان منحنيات الاحداثيـات وأشعة التوجيه مبينة في الشكل (٥) .



الشكل (٥)

بما أن :

$$x = \rho \cos \Phi \quad , \quad y = \rho \sin \Phi \quad , \quad z = z$$

فان :

$$r = (\rho \cos \Phi) \hat{i} + (\rho \sin \Phi) \hat{j} + (z) \hat{k}$$

$$h_\rho = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = | (\cos \Phi) \hat{i} + (\sin \Phi) \hat{j} | = 1$$

$$h_\Phi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi} \right| = | (- \rho \sin \Phi) \hat{i} + (\rho \cos \Phi) \hat{j} | = \rho$$

$$h_z = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = | \hat{k} | = 1$$

وبتعويض هذه النتائـــج في (1 . 6 . 5) , (1 . 6 . 6) , (1 . 6 . 7) , (1 . 6 . 8) تنتج القوانين المقابلة في الاحداثيات الاسطوانية مثلا :

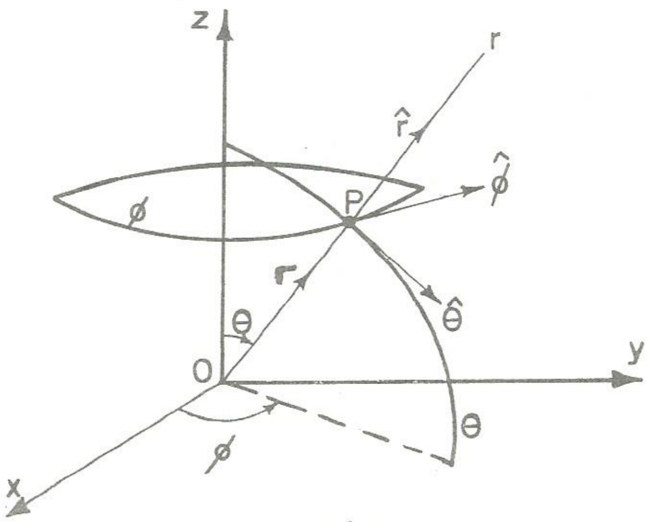
$$(\nabla) U = (\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\Phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \Phi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) U$$

ثانيا) الاحداثيات الكروية :

هنا : $u = r \qquad v = \theta \qquad w = \Phi$

$\hat{u} = \hat{r} \quad , \quad \hat{v} = \hat{\theta} \quad , \quad \hat{w} = \hat{\Phi}$

ان منحنيات الاحداثيات وأشعة التوجيه مبينة في الشكل (٦) .



الشكل (٦)

بما أن :

$$x = r \sin\theta \cos\Phi \quad , \quad y = r \sin\theta \sin\Phi \quad , \quad z = r \cos\theta$$

فان :
$$\mathbf{r} = (r \sin\theta \cos\Phi)\,\hat{i} + (r \sin\theta \sin\Phi)\,\hat{j} + (r \cos\theta)\,\hat{k}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right| = |(\sin\theta \cos\Phi)\,\hat{i} + (\sin\theta \sin\Phi)\,\hat{j} + (\cos\theta)\,\hat{k}| = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| = |(r \cos\theta \cos\Phi)\,\hat{i} + (r \cos\theta \sin\Phi)\,\hat{j} -$$

$$(r \sin\theta)\,\hat{k}| = r$$

$$h_\Phi = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Phi}\right| = |-(r \sin\theta \sin\Phi)\,\hat{i} + (r \sin\theta \cos\Phi)\,\hat{j}| = r \sin\theta$$

وبتعويض هذه النتائج في (1 . 6 . 5) , (1 . 6 . 6) , (1 . 6 . 7) , (1 . 6 . 8)
تنتج القوانين المقابلة في الاحداثيات الكروية مثلا :

$$(\nabla)\,U = \left(\hat{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\Phi}}{r \sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \Phi}\right) U$$

امثلـــة (١)

مثال ١-٢-١

عين سطوح سوية التابع $U=\frac{x^2+y^2}{z}$ في نطاق $\mathcal{D}$ لا يشمل مبدأ الاحداثيات ثم احسب قيمة اعظم مشتق موجه لهذا التابع فـــي النقطة $P(1,-1,2)$.

<u>الحـــل</u> :

ان سطوح سوية التابع العددي للموضع $U=\frac{x^2+y^2}{z}$ في $\mathcal{D}$ تعطى بالمعادلة $\frac{x^2+y^2}{z}=C$ حيث C هو ثابت على كـل سطح اى ان $z=\frac{x^2+y^2}{C}$ فهي مجسمات قطوع مكافئة دورانية حول محور z .

ان المشتقات الاولى للتابع هي :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{2x}{z}\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{2y}{z}\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{(x^2+y^2)}{z^2}$$

وهذه المشتقات مستمرة وغير منعدمة معا في $\mathcal{D}$ فتكون سطوح سوية التابع صقيلة في كل نقطة من هذا النطاق وبالتالي فان التدرج موجود في $\mathcal{D}$.

ان قيمة اعظم مشتق موجه في P هي قيمة تدرج التابع فيهـا وبما ان P نقطة من $\mathcal{D}$ فان :

$$\nabla U\Big|_{(1,-1,2)}=\hat{i}\left(\frac{2x}{z}\right)+\hat{j}\left(\frac{2y}{z}\right)-\hat{k}\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\Big|_{(1,-1,2)}$$
$$=\hat{i}-\hat{j}-\frac{\hat{k}}{2}$$

مثال ١-٢-٢

اذا كان $\mathbf{r} = r\hat{r}$ شعاع الموضع فاحسب قيمة تدرج التابع $U = r^3$ ثم احسب قيمة مشتق هذا التابع الموجه وفق الشعاع $\mathbf{r}$.

<u>الحـــل :</u>

ان التابع العددى للموضع $U = r^3$ هو تابع للاحداثي الكروى r فقط فتكون سطوح سويته هي كرات مركزها مبدأ الاحداثيات وبما انها سطوح صقيلة فان التدرج موجود دوما وينتج من القانون (1.2.5) ان :

$$\nabla r^3 = \hat{r}\frac{d}{dr}(r^3) = \hat{r}(3r^2) = 3r(r\hat{r}) = 3r\mathbf{r}$$

ان مشتق التابع U الموجه وفق الشعاع $\mathbf{r}$ هو :

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)r^3 = \mathbf{r}\cdot(\nabla r^3) = \mathbf{r}\cdot(3r\mathbf{r}) = 3r^3$$

مثال ١-٣-١

احسب تفرق ودوران شعاع الموضع $\mathbf{r}$.

<u>الحـــل :</u>

إن $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ هو تابع شعاعي للموضع وهو مستمر مع مشتقاته الاولى :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \hat{i} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \hat{j} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \hat{k}$$

فتفرقه ودورانه موجودان .

باستخدام القانون (1.3.1) ينتج ان تفرقه هو :

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

وباستخدام القانون (1.3.2) ينتج ان دورانه هو :

$$\nabla \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(0) = \mathbf{0}$$

مثال ١-٣-٢

احسب تفرق ودوران التابع الشعاعي للموضع $\mathbf{F} = (\hat{i} \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{r}$

حيث $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$.

الحـــل :

لدينا :

$$\mathbf{F} = (\hat{i} \cdot \mathbf{r})\, \mathbf{r}$$

$$= (x)(\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z) = \hat{i}x^2 + \hat{j}xy + \hat{k}xz$$

وهذا التابع مستمر مع مشتقاته الجزئية الاولى دومـــــا لان مركباته كثيرات حدود .

من القانون (1.3.1) ينتج ان تفرقه هو :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (xy)}{\partial y} + \frac{\partial (xz)}{\partial z}$$

$$= 2x + x + x = 4x$$

ومن القانون (1.3.2) ينتج ان دورانه هو :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(z-0) + \hat{k}(y-0)$$

$$= -\hat{j}z + \hat{k}y$$

مثال ١-٤-١

ليكن $\mathbf{r} = r\hat{r}$ ، احسب $\nabla . \frac{\hat{r}}{r}$ في نطاق يطلب تعيينه .

الحـل :

بما ان $\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ فان $\frac{\hat{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$

هو تابع شعاعي للموضع مستمر مع مشتقاته الاولى في نطـــــاق لا يحوى مبدأ الاحداثيات ولذا فان تفرقه موجود ٠

من القاعدة الاولى في الاشتقاق ينتج :

$$\nabla . \left(\frac{1}{r^2}\,\mathbf{r}\right) = \left(\nabla \frac{1}{r^2}\right) . \mathbf{r} + \frac{1}{r^2}(\nabla . \mathbf{r})$$

$$= \left(-\frac{2\hat{r}}{r^3}\right) . \hat{r}r + \frac{1}{r^2}(3) = \frac{1}{r^2}$$

وذلك لان $\nabla . \mathbf{r} = 3$ كما رأينا في المثال ١-٣-١ ولأن :

$$\nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = \hat{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \hat{r}\left(\frac{-2}{r^3}\right) = \frac{-2\hat{r}}{r^3}$$

اذ ان $\frac{1}{r^2}$ تابع للاحداثي الكروي r فقط .

مثال ١-٤-٢

احسب تفرق ودوران التابع $\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{r}$

حيث $\mathbf{r}$ شعاع الموضع و $\mathbf{w}$ شعاع ثابت .

<u>الحــل :</u>

ان $\mathbf{v} \in cl^1$ دوما فتفرقه ودورانه موجودان .

باستخدام القاعدة الثالثة في الاشتقاق ينتج ان تفرقه هو :

$$\nabla \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) - \mathbf{w} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{r}) = 0$$

وذلك لان $\nabla \wedge \mathbf{r} = 0$ كما رأينا في المثال ١-٣-١

ولان $\nabla \wedge \mathbf{w} = 0$ لكون $\mathbf{w}$ ثابتا .

وباستخدام القاعدة الرابعة في الاشتقاق ينتج ان دورانه هو :

$$\nabla \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{r} + \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{w})$$

$$= 0 - \mathbf{w} + \mathbf{w}(3) - 0$$

$$= 2\mathbf{w}$$

وذلك لانعدام مشتقات الشعاع الثابت $\mathbf{w}$ ايا كان نوعهـــــا

كما ان $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ واخيرا فان :

$$(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\left(w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})$$

$$=w_x\hat{i}+w_y\hat{j}+w_z\hat{k}=\mathbf{w}$$

مثال ١-٥-١

آ) برهن ان التابع العددى للموضع $u=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ هو توافقي في اى نطاق لا يشمل مبدأ الاحداثيات •

ب) برهن ان التابع الشعاعي للموضع $\mathbf{F}=x^2\hat{i}+y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ هو كموني في اى نطاق بسيط الاتصال ثم احسب كمونه العددى W •

الحـل :

آ) ان $u\in cl^2$ في اى نطاق لا يشمل مبدأ الاحداثيات فيكون $\nabla^2 u$ موجودا في هذا النطاق ومن القانون ($1.5.1c$) ينتج:

$$\nabla^2 u=-\left\{\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{z^2+x^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}+\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right\}=0$$

فالتابع u توافقي في هذا النطاق •

ب) ان $\mathbf{F}$ تابع شعاعي كموني وفق القانون ($1.5.2c$) لان $\mathbf{F}\in cl^1$ في اى نطاق بسيط الاتصال اذ ان مركباته كثيرات حدود كما ان :

$$\nabla\wedge\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

ولدينا عندئذ ان $\mathbf{F}=\nabla W$ ومنه :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = x^2 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = y^2 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial z} = z^2$$

بالمكاملة الجزئية ينتج :

$$W = \frac{x^3}{3} + f_1(y,z) \quad , \quad W = \frac{y^3}{3} + f_2(x,z) \; , \; W = \frac{z^3}{3} + f_3(x,y)$$

حيث f_1 ، f_2 ، f_3 هي توابع اختيارية .

ان اجتماع هذه الحلول هو الكمون العددى $W = \frac{x^2+y^2+z^2}{3} + C$

حيث C هو ثابت اختيارى .

مثال ١-٦-١

برهن ان التابع العددى للموضع $U = \left(r + \frac{1}{r^2}\right) \cos\theta$ توافقي

في نطاق فراغي يطلب تعيينه .

الحل :

في اى نطاق فراغي لا يشمل المحور oz (أي $r^2 \sin\theta \neq 0$) يكون

$U \in cl^2$ واللابلاسي موجودوهو:

$$\nabla^2 U = \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}$$

وذلك لان U هنا ليس تابعا للاحداثي الكروى ϕ ومنه :

$$\nabla^2 U = \frac{2}{r}\left(1 - \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta + \left(\frac{6}{r^4}\right)\cos\theta + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\left(r + \frac{1}{r^2}\right)(-\sin\theta)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left(r + \frac{1}{r^2}\right)(-\cos\theta) = 0$$

اى ان U تابع توافقي في هذا النطاق .

مثال ١-٦-٢

احسب تدرج التابع العددى للموضع

$U = \rho(\sin\phi - \cos\phi) + \sqrt{\rho^2 + z^2}$ في المنطقة $\mathcal{R}$ المحاطة بالسطوح التالية :

$$z = 0 \;,\; z = 1 \;,\; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

الحل :

ان المنطقة $\mathcal{R}$ محاطة بالمستويين $z = 1$ و $z = 0$ وبالاسطوانة الدورانية القائمة $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ التى توازى مولداتها محور z وهذه المنطقة لا تشمل المحور z كما ان المشتقات الجزئية الاولى للتابع وهي :

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \sin\phi - \cos\phi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \rho(\cos\phi + \sin\phi) \;,\; \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

مستمرة وغير منعدمة معا في $\mathcal{R}$ فالتدرج موجود ويحسب من القانون :

$$\nabla U = \hat{\rho}\,\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho}\,\frac{\partial U}{\partial \phi} + \hat{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= \hat{\rho}\left(\sin\phi - \cos\phi + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) + \hat{\phi}(\cos\phi + \sin\phi) + \hat{k}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)$$

مســـــــائل (١)

في المسائل التالية يجب التأكـد من تحقـق شروط وجود التراكيب المطلوب حسابها او تعيين نطاق وجودها .

١) ليكن التابع الشعاعي $\mathbf{r}(\hat{i}\cdot\mathbf{r}) = F$ حيث $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

والمطلوب :

آ) احسب $\nabla\cdot(\nabla\wedge F)$

ب) احسب $\nabla\wedge(\nabla\wedge F)$

الجواب : آ) صفر ، ب) $2\hat{i}$

٢) اذا كان $U = \dfrac{x+z}{x^2+y^2+z^2}$ فاحسب قيمة ما يلي :

$$\nabla U \quad , \quad \nabla^2 U \quad , \quad \nabla\wedge(\nabla U)$$

الجــواب :

$$\nabla U = \frac{\hat{i}(y^2+z^2-x^2-2xz)-\hat{j}(2yx+2yz)+\hat{k}(x^2+y^2-z^2-2xz)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\nabla^2 U = \frac{-2(x+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad , \quad \nabla\wedge(\nabla U) = 0$$

٣) برهن ان $r^3\mathbf{r}$ هو تابع شعاعي كموني واوجد كمونـــه العددي U ثم احسب $\nabla^2 U$.

الجـواب :

$$\nabla^2 U = 6r^3 \quad , \quad U = \frac{r^5}{5} + C$$

٤) برهن ان :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

٥) احسب قيم الثوابت a, b, c لكي يكون التابع الشعاعي :

$$\mathbf{F} = (x + cy + az)\hat{i} + (x + y^2 + bz)\hat{j} + (cy + z^2)\hat{k}$$

كمونيا في اى نطاق بسيط الاتصال ثم احسب تفرق التابـــع الناتج ٠

الجواب : $a = 0 \quad , \quad c = 1 \quad , \quad b = 1$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2y + 2z$$

٦) اذا كان $U = \left(r + \frac{1}{r^2}\right) \cos\theta + \sin\phi$

فاحسب التراكيب التالية :

$$\nabla U \quad , \quad \nabla^2 U \quad , \quad \nabla \wedge (\nabla U)$$

الجواب :

$$\nabla U = \hat{r}\left(1 - \frac{2}{r^3}\right)\cos\theta - \hat{\theta}\left(1 + \frac{1}{r^3}\right)\sin\theta + \hat{\phi}\,\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$$

$$\nabla^2 U = -\frac{\sin\phi}{r^2 \sin^2\theta} \quad , \quad \nabla \wedge (\nabla U) = 0$$

٧) لتكن u, v, w توابع للموضع ذات مشتقات اولى مستمرة في نطاق فراغي $\mathscr{D}$ بسيط الاتصال وليكن $u \cdot (\nabla \wedge u) = 0$ في كل نقطة من $\mathscr{D}$. برهن انه في هذا النطاق يكون :

$$v\,\mathbf{u} = \nabla w$$

٨) برهن ان :

آ) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = 0$

ب) $\nabla \wedge (r\,\mathbf{r}) = \mathbf{0}$

ج) $\nabla \cdot \left[\nabla \wedge (\mathbf{r} \ln r)\right] = \mathbf{0}$

د) $\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}$

هـ) $\nabla \wedge \hat{\phi} = \frac{\hat{k}}{\rho}$

و) $\nabla^2 (\rho^2 \cos\phi) = 3\cos\phi$

٩) اذا كانت w, u, v توابع للموضع فبرهن ان

$$\nabla(u \cdot v) \quad \text{و} \quad w \nabla w$$

غير اعصارين واستنتج ان الشعاع التالي لولبي :

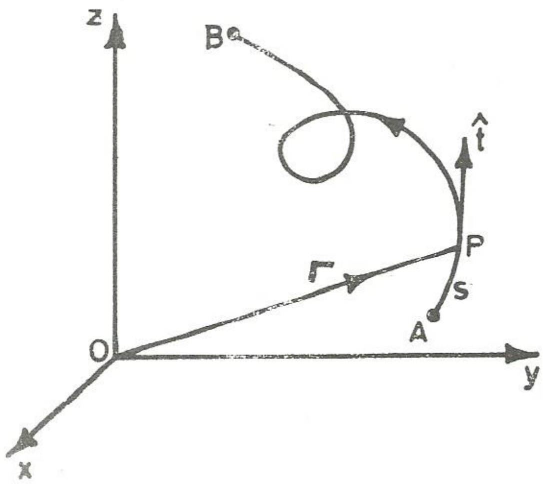
$$(w \nabla w) \wedge \nabla (u \cdot v)$$

٢ ـ التكاملات الشعاعية

٢ – ١ التكاملات الخطية على منحن موجه

٢ – ١ – ١ المنحني الموجه

ليكن Γ منحنياً فراغياً محدداً وصقيلا يصل بين النقطتين B , A (الشكل ١) أي أنه يوجد في كل نقطة P (**r**) من Γ مماس وحيد يتحول باستمرار بتغير نقطة التماس. يمكن توجيه هذا المنحني في اتجاهين متعاكسين فاذا اتخذت النقطة A مبدأ لقياس طول القوس فنقول ان المنحني موجه من A الى B



الشكل (١)

(الشكل ١) ، وبفرض $\widehat{AP} = s$ ، $\hat{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ شعاع توجيه المماس في P يكون عنصر الطول الموجه هو :

$$\mathbf{ds} = \hat{t}\, ds \qquad (\mathbf{ds} = \mathbf{dr})$$

أما اذا قيس طول القوس بدءاً من النقطة B فنقول ان المنحني Γ موجه من B الى A وتتغير اشارة عنصر الطول الموجه لتغير اشارة $\hat{t}$.

اذا كان المنحني Γ صقيلا جزئياً فيمكن أن نوجه كل جزء صقيل منه بالطريقة السابقة نفسها على أن نعتبر نقطة نهاية الجزء الاول هي نقطة بداية قياس طول القوس على الجزء التالي .

ان ما ذكر أعلاه ينطبق أيضاً على الحالة التي يكون فيها Γ منحنياً مغلقاً ، وعلى الحالة الخاصة التي يكون فيها Γ منحنياً مستوياً .

ملاحظة :

فيما يلي نقصد بالمنحني الموجه Γ المنحني الفراغي المحدد المفتوح أو المغلق والصقيل أو الصقيل جزئياً ، والموجه من A الى B ، ونعتبر المنحني المستوي حالة خاصة ، على أن نلاحظ أن المنحني المستوي المغلق يعتبر موجهاً في الاتجاه الموجب اذا وجه في اتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة .

٢ – ١ – ٢ أنواع التكاملات الخطية على منحن موجه

أولا) إن التكامل الخطي العددي للتابع الشعاعي $\mathbf{F} \in C1$ على المنحني الموجه Γ (أو جولان **F** حول Γ) هو العدد :

$$(2.1.1a) \qquad \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\Gamma (\mathbf{F} \cdot \hat{t})\, ds = \int_\Gamma f\, ds$$

حيث $f = \mathbf{F} \cdot \hat{t}$ هو تابع مستمر أو مستمر جزئيـــاً على Γ فيكون التكامل الخطي $\int_\Gamma f\, ds$ موجوداً وقد درسنا طرق حسابه .

بما أن :

$$\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad , \quad d\mathbf{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

فان :

$$(2.1.1b) \qquad \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_\Gamma \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz\right)$$

وهي طريقة أخرى لكتابة التكامل الخطي العددي ·

اذا عكست الوجهة على Γ فان :

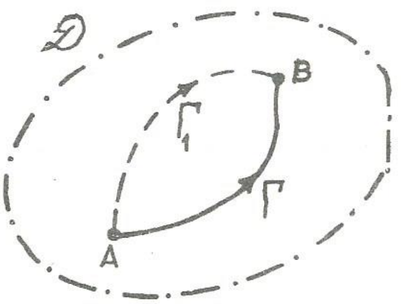
$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}.\mathbf{ds} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = -\int_{\widehat{BA}} \mathbf{F}.\mathbf{ds} = \int_{\Gamma} f\,ds$$

واذا كان Γ منحنياً مغلقاً فنرمز للتكامل الخطي العددي عليه بالرمز $\oint_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds}$.

في الحالة العامة تكون قيمة التكامل (2.1.1a) مرتبطة بالمنحني Γ (أي مرتبطة بمسار المكاملة) الواصل بين النقطتين B , A وذلك لأننا نعوض عن f و ds من معادلات المنحني ، ولكن التكامل يكون مستقلا عن مساره في الحالة الخاصة التي يكون فيها :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \qquad\qquad \mathbf{F} \in Cl^1$$

في نطاق بسيط الاتصال $\mathcal{D}$ يحوي المنحني Γ (الشكل ٢) اذ في هذه الحالة يكون $\mathbf{F} = \nabla U$ حيث $U \in Cl^2$ هو تابع عددي للموضع في $\mathcal{D}$ وبما أن :



الشكل (٢)

$$\nabla U.\mathbf{ds} = \nabla U\cdot\mathbf{dr} = dU$$

فان :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{ds} = \int_{\Gamma} \nabla U.\mathbf{ds} = \int_{\widehat{AB}} dU = U_B - U_A \qquad (2\cdot1.1c)$$

وعندما يكون Γ منحنياً مغلقاً فان :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (2 \cdot 1 \cdot 1d)$$

أي أن قيمة التكامل الخطي العددي لشعاع كموني **F** في $\mathcal{D}$ ترتبط بقيمة كمونه العددي U في نقطتي النهاية والبداية فقط ، ولا ترتبط بمسار المكاملة . في هذه الحالة يمكن استبدال المنحني الموجه المفتوح $\Gamma \in \mathcal{D}$ بأي منحن موجه مفتوح آخر $\Gamma_1 \in \mathcal{D}$ يصل بين النقطتين A , B (الشكل ٢) كما يمكن الاستغناء عن المنحني نهائياً في حساب التكامل .

ثانيا) ان التكامل الخطي الشعاعي للتابع الشعاعي $\mathbf{F} \in C1$ على المنحني الموجه Γ هو الشعاع :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \wedge d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \qquad (2.1.2)$$

$$= \hat{i} \int_{\Gamma} (F_y\, dz - F_z\, dy) - \hat{j} \int_{\Gamma} (F_x\, dz - F_z\, dx) + \hat{k} \int_{\Gamma} (F_x\, dy - F_y\, dx)$$

والتكاملات الخطية الثلاثة الناتجة موجودة لأن F_x , F_y , F_z مستمرة على Γ .

ثالثاً) ان التكامل الخطي الشعاعي للتابع العددي $U \in C1$ على المنحني الموجه Γ هو الشعاع :

$$\int_{\Gamma} U\, d\mathbf{s} = \hat{i} \int_{\Gamma} U\, dx + \hat{j} \int_{\Gamma} U\, dy + \hat{k} \int_{\Gamma} U\, dz \qquad (2.1.3)$$

والتكاملات الخطية الثلاثة الناتجة موجودة لأن U مستمر على Γ .

٢ ـ ٢ التكاملات السطحية على سطح موجه

٢ ـ ٢ ـ ١ السطح الموجه

ان المنحني الموجه وفقاً لوجهة مماسه $\hat{t}$ يقابله السطح الموجه وفقاً لوجهة ناظمه $\hat{n}$.

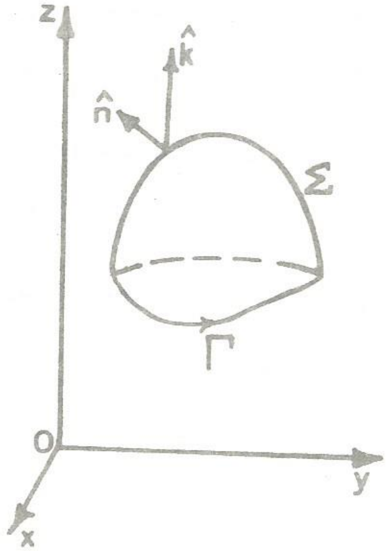
وجهة الناظم :

نبين فيما يلي كيفية تحديد وجهة الناظم في نوعين من السطوح المحددة الصقيلة أو الصقيلة جزئياً :

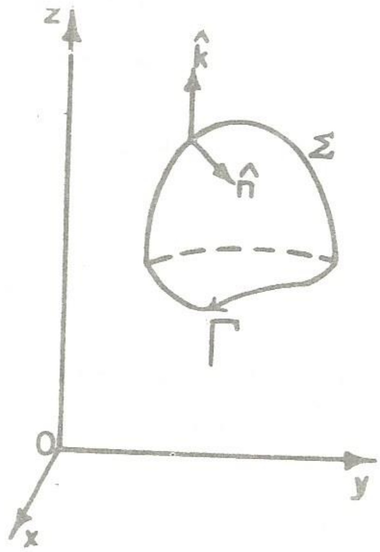
أولا) السطح المفتوح والبسيط في أحد الاتجاهات الديكارتية :

ليكن Σ سطحاً صقيلا وبسيطاً في اتجاه z وذا حافة Γ صقيلة أو صقيلة جزئياً . ان هذا السطح هو سطح ذو وجهين بالنسبة لوجهة الناظم عليه وذلك لأنه في أية نقطة من السطح يمكن أن نوجه الناظم $\hat{n}$ بحيث يصنع زاوية حادة مع $\hat{k}$ (أي مع الوجهة الموجبة لمحور z) كما في الشكل (٣ آ) أو زاوية منفرجة مع $\hat{k}$ كما في الشكل (٣ب) ويجب أن نلاحظ أن $\hat{n}$ هو شعاع يتغير من نقطـــة لأخرى ، ولكنه مستمر لأن Σ سطح صقيل .

لتعيين وجهة وحيدة للناظم في نقطة فقد اصطلح على اعتبار $\hat{n}$ موجهاً في اتجـاه تقدم بزال يدور وفق طريقة توجيه المنحني Γ وقد أوضح ذلك في الشكلين (٣ آ) و (٣ ب) .

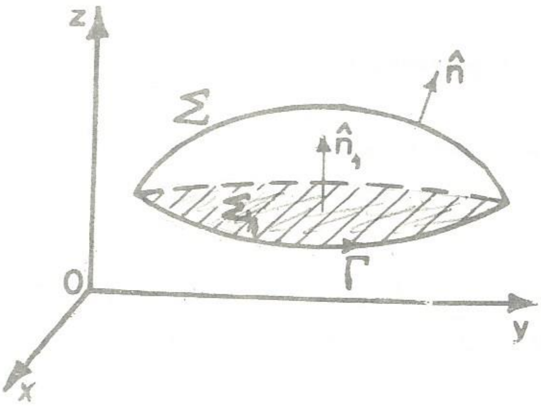


الشكل (٣ آ)



الشكل (٣ ب)

اذا كانت الحافة Γ منحنياً مستوياً موجهاً في الاتجاه الموجب فان وجهة الناظم $\hat{n}$ (المتغير) على السطح Σ والناظم $\hat{n}_1$ (الوحيد) على السطح المستوي Σ_1 مبينة في الشكل (٤) .



الشكل (٤)

ان ماذكرناه عن سطح بسيط في اتجاه z ينطبق أيضاً على سطح بسيط في اتجاه x أو y .

إذا كان السطح صقيلا جزئياً وبسيطاً في أحد الاتجاهات الديكارتيـة وكان ذا حافة صقيلة جزئياً ، فانه يمكن بالطريقة نفسها تعيين وجهة $\hat{n}$ على كل جزء صقيل .

ثانيا) السطح المغلق : إذا كان Σ سطحاً مغلقـاً فهو سطح ذو وجهين ، وقـد اصطلح على اعتبار $\hat{n}$ موجهاً الى خارج السطح دوماً .

السطح الموجه وعنصر المساحة الموجه :

كل سطح من النوعين المذكورين أعلاه يدعى سطحاً موجهاً ، لأن وجهـة $\hat{n}$ عينت عليه ، وبفرض S مساحة السطح فان عنصر المساحة الموجه هو :

$$\mathbf{dS} = \hat{n}\, dS$$

ملاحظة :

فيما يلي نقصد بالسطح الموجه Σ سطحاً من أحد النوعين المذكورين أعلاه ، ونقصد بالسطح الموجه المفتوح Σ سطحاً من النوع الاول ، ونقصد بالسطح الموجـه المغلق Σ سطحاً من النوع الثاني .

٢ ـ ٢ ـ ٢ أنواع التكاملات السطحية على سطح موجه

ليكن $U \in Cl$ تابعاً عدديـاً للوضع على سطـح موجه Σ وليكن $\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \in Cl$ تابعاً شعاعياً للوضع عليه .

توجد ثلاثة أنواع من التكاملات لهذه التوابع على Σ وهي :

أولاً) ان التكامل السطحي العددي للتابع الشعاعي $\mathbf{F}$ على السطح الموجـه Σ (أو تدفق $\mathbf{F}$ عبر Σ) هو العدد :

$$\int_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_\Sigma (\mathbf{F} \cdot \hat{n})\, dS = \int_\Sigma f\, dS \qquad (2.2.1)$$

حيث $\mathbf{F}.\hat{n} = f$ هو تابع مستمر أو مستمر جزئياً على Σ فيكون التكامل السطحي $\int_\Sigma f\, dS$ موجوداً وقد درسنا طرق حسابه .

اذا كان Σ سطحاً مغلقاً فنرمز للتكامل السطحي العددي عليه بالرمز $\oint_\Sigma \mathbf{F}.d\mathbf{S}$

ثانياً) ان التكامل السطحي الشعاعي للتابع الشعاعي $\mathbf{F}$ على السطح الموجه Σ هو الشعاع :

$$\int_\Sigma d\mathbf{S} \wedge \mathbf{F} = \int_\Sigma (\hat{n} \wedge \mathbf{F})\, dS \qquad (2.2.2)$$

$$= \int_\Sigma \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} dS$$

حيث $\cos\gamma$, $\cos\beta$, $\cos\alpha$ هي جيوب تمام توجيه $\hat{n}$ وقد درسنا طريقة حسابها اذا علمنا معادلة السطح Σ . وبنشر المعين ينتج أن التكامل الاخير هو المجموع الشعاعي لثلاثة تكاملات سطحية ، وهي موجودة لأن F_z , F_y , F_x مستمرة على Σ ولان جيوب التمام مستمرة أو مستمرة جزئياً على هذا السطح .

ثالثاً) ان التكامل السطحي الشعاعي للتابع العددي U على السطح الموجه Σ هو الشعاع :

$$\int_\Sigma U\, d\mathbf{S} = \int_\Sigma (U\hat{n})\, dS \qquad (2.2.3)$$

$$= \hat{i} \int_\Sigma U \cos\alpha\, dS + \hat{j} \int_\Sigma U \cos\beta\, dS + \hat{k} \int_\Sigma U \cos\gamma\, dS$$

وكل من التكاملات السطحيــة الثلاثة الناتجة موجود لان U مستمر وجيوب التمام مستمرة أو مستمرة جزئياً على Σ .

٢ ـ ٣ التكامل الحجمي لتابع شعاعي للموضع

خلافاً لما رأيناه في توجيه عنصر الطول أو عنصر المساحة ، فان عنصر الحجم غير موجه اذ لا يمكن تعيين شعاع توجيه وحيد يمكن أن نوجه عنصر الحجم عليه .

اذا كان : $\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \in Cl$ تابعاً شعاعياً للموضع في منطقة فراغية $\mathcal{R}$ فان تكامل **F** على $\mathcal{R}$ هو :

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{F}\, dV = \hat{i} \int_{\mathcal{R}} F_x\, dV + \hat{j} \int_{\mathcal{R}} F_y\, dV + \hat{k} \int_{\mathcal{R}} F_z\, dV$$

والتكاملات الحجمية الثلاثة الناتجة موجودة لان F_x , F_y , F_z مستمرة على $\mathcal{R}$.

٢ ـ ٤ نظريات التحويل من تكامل حجمي الى سطحي وبالعكس

٢ ـ ٤ ـ ١ النظرية الاولى (نظرية غوص في التفرق)

اذا كان $\mathbf{F} \in Cl^1$ تابعاً شعاعياً للموضع في منطقة فراغية $\mathcal{R}$ محاطة بالسطح الموجه المغلق Σ فـان التكامل الحجمي لتفرق **F** في $\mathcal{R}$ مساو للتكامل السطحي العددي للتابـع **F** على Σ (أو تدفق **F** عبر Σ) أي أن :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

البرهان : نقتصر في برهاننا على الحالة التي تكون فيها $\mathcal{R}$ منطقة فراغية بسيطة وهذا البرهان يمكن تعميمه على أية منطقة فراغية يمكن تقسيمها الى عدة مناطق بسيطة

بحيث لا توجد نقاط داخلية مشتركة بين المناطق البسيطة ، وبحيث يشكل اجتماعها المنطقة الاصلية .

بما أن :

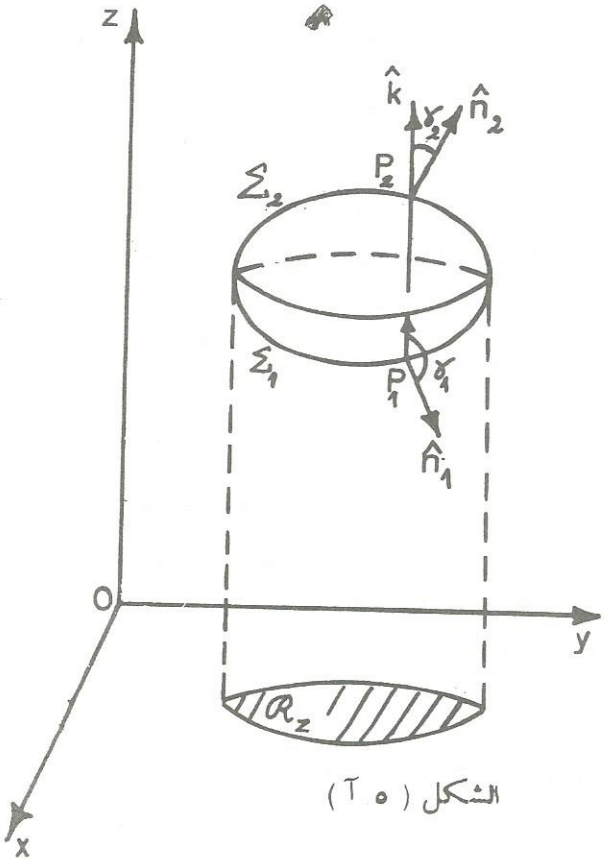
$$\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

فان :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

ويكون :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV \qquad (2.4.1)$$



الشكل (٥ آ)

نحسب أولاً التكامل الحجمي :

$$I_1 = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_z}{\partial z} dV$$

$$= \iiint_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_z}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

$$= \iint_{\mathcal{R}_z} dx\, dy \int_{z_{P_1}}^{z_{P_2}} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz$$

حيث $\mathcal{R}_z$ هو مسقط السطح Σ على المستوي $z = 0$ و A_z هي مساحة هذا المسقط كما أن P_2 , P_1 هما النقطتان التي يلاقي فيهما مستقيم شاقولي السطح Σ (الشكل ٥ آ).

وينتج من ذلك أن :

$$(2.4.2) \qquad I_1 = \iint_{\mathcal{R}_z} (F_z)_{P_2}\, dx\,dy - \iint_{\mathcal{R}_z} (F_z)_{P_1}\, dx\,dy$$

حيث $(F_z)_{P_1}$ و $(F_z)_{P_2}$ هما قيمتا F_z في النقطتين P_1 , P_2 على الترتيب .

ليكن $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ الناظمين على السطح في P_1 , P_2 على الترتيب ، ولتكن γ_1 الزاوية بين $\hat{n}_1$ و $\hat{k}$ ولتكن γ_2 الزاوية بين $\hat{n}_2$ و $\hat{k}$ (الشكل ٥ آ) . ان عنصر المساحة الموجه بجوار النقطه P_2 هو $\mathbf{dS} = \hat{n}_2\, dS$.وبما أن γ_2 زاوية حادة فان مساحة مسقطه على المستوي $z = 0$ هي :

$$dA_z = (\cos\gamma_2)\, dS = (\hat{k}\cdot\hat{n}_2)\, dS = \hat{k}\cdot\mathbf{dS}$$

أي أن :

$$(2.4.3) \qquad +dx\,dy = \hat{k}\cdot\mathbf{dS}$$

أما عنصر المساحة الموجه بجوار النقطة P_1 فهو $\mathbf{dS} = \hat{n}_1\, dS$ وبما أن γ_1 زاوية منفرجة فان مساحة مسقطه على المستوي $z = 0$ هي :

$$dA_z = -(\cos\gamma_1)\, dS = -(\hat{k}\cdot\hat{n}_1)\, dS = -\hat{k}\cdot\mathbf{dS}$$

أي أن :

$$(2.4.4) \qquad -dx\,dy = \hat{k}\cdot\mathbf{dS}$$

بما أن السطح Σ يقسم الى جزئين Σ_1 , Σ_2 ناظماهما $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$ على الترتيب (الشكل ٥ آ) فانه بتعويض (2.4.3) , (2.4.4) في (2.4.2) ينتج :

$$I_1 = \int_{\Sigma_2} F_z\, \hat{k}\cdot\mathbf{dS} + \int_{\Sigma_1} F_z\, \hat{k}\cdot\mathbf{dS}$$

حيث F_z تقدر على الجزء Σ_2 في التكامل الأيسر ، وعلى الجزء Σ_1 في التكامل الأيمن . ينتج من ذلك أن :

$$I_1 = \oint_{\Sigma} F_z \hat{k} \cdot d\mathbf{S}$$

أي أن :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_z}{\partial z} dV = \oint_{\Sigma} F_z \hat{k} \cdot d\mathbf{S} \qquad (2.4.5)$$

بالطريقة نفسها تنتج العلاقتان :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_x}{\partial x} dV = \oint_{\Sigma} F_x \hat{i} \cdot d\mathbf{S} \qquad (2.4.6)$$

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial F_y}{\partial y} dV = \oint_{\Sigma} F_y \hat{j} \cdot d\mathbf{S} \qquad (2.4.7)$$

بتعويض (2.4.5) , (2.4.6) , (2.4.7) في (2.4.1) ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \oint_{\Sigma} (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

٢ ـ ٤ ـ ٢ النظرية الثانية

اذا كان $U \in C^1$ تابعاً عددياً للموضع في منطقة فراغية $\mathcal{R}$ محاطة بسطح موجه مغلق Σ فـان التكامل الحجمي لتدرج U في $\mathcal{R}$ مساو للتكامل السطحي الشعاعي للتابع U على Σ أي أن :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla U\, dV = \oint_{\Sigma} U\, d\mathbf{S}$$

البرهان :

بوضع $F_x = F_y = F_z = U$ في العلاقات (2.4.5) , (2.4.6) , (2.4.7) ينتـج :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial U}{\partial z} dV = \oint_{\Sigma} U\hat{k} . d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} U(\hat{k} . \hat{n}) dS$$

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial U}{\partial x} dV = \oint_{\Sigma} U\hat{i} . d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} U(\hat{i} . \hat{n}) dS$$

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial U}{\partial y} dV = \oint_{\Sigma} U\hat{j} . d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} U(\hat{j} \cdot \hat{n}) dS$$

بضرب هذه العلاقات على الترتيب بأشعة التوجيه $\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$ والجمع ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}} (\hat{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial U}{\partial z}) dV =$$

$$\oint_{\Sigma} U[\hat{i}(\hat{i} . \hat{n}) + \hat{j}(\hat{j} \cdot \hat{n}) + \hat{k}(\hat{k} . \hat{n}] dS =$$

$$\oint_{\Sigma} U[\hat{n}] dS = \oint_{\Sigma} U d\mathbf{S}$$

٢ ـ ٤ ـ ٣ النظرية الثالثة

اذا كان $\mathbf{F} \in C^1$ تابعاً شعاعياً للوضع في منطقة فراغية $\mathcal{R}$ محاطـة بسطح موجـه مغلق Σ فان التكامل الحجمي لدوران $\mathbf{F}$ في $\mathcal{R}$ مساو للتكامل السطحي الشعاعي للتابع $\mathbf{F}$ على Σ أي أن :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \wedge \mathbf{F} dV = \oint_{\Sigma} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{F}$$

البرهان : اذا كان $\mathbf{M} \in C^1$ تابعاً شعاعياً للوضع في $\mathcal{R}$ فينتج من النظريـة الاولى أن :

$$(i) \qquad \int_{\mathcal{R}} \nabla . \mathbf{M} dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{M} . d\mathbf{S}$$

نفرض :

$$M = F \wedge c \qquad \text{(ii)}$$

حيث c هو شعاع ثابت . من قواعد الاشتقاق ينتج :

$$\nabla \cdot M = \nabla \cdot (F \wedge c) = c \cdot (\nabla \wedge F) - F \cdot (\nabla \wedge c)$$

أي :

$$\nabla \cdot M = c \cdot (\nabla \wedge F) \qquad \text{(iii)}$$

وذلك لأن c ثابت فيكون $\nabla \wedge c = 0$.

بتعويض (ii) و (iii) في (i) ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}} c \cdot (\nabla \wedge F)\, dV = \oint_{\Sigma} (F \wedge c) \cdot dS$$

$$= \oint_{\Sigma} c \cdot (dS \wedge F)$$

وذلك باستخدام خواص الجداء المختلط ، وبما أن c ثابت فان :

$$c \cdot \int_{\mathcal{R}} \nabla \wedge F\, dV = c \cdot \oint_{\Sigma} dS \wedge F$$

ان العلاقة الأخيرة صحيحة لأجل أي شعاع ثابت c ومنه :

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \wedge F\, dV = \oint_{\Sigma} dS \wedge F$$

الخلاصة اذا كان Σ سطحاً موجهاً مغلقاً يحد منطقة فراغيـــة $\mathcal{R}$ واذا كان $U \in C^1$, $F \in C^1$ تابعين للوضع في $\mathcal{R}$ فان :

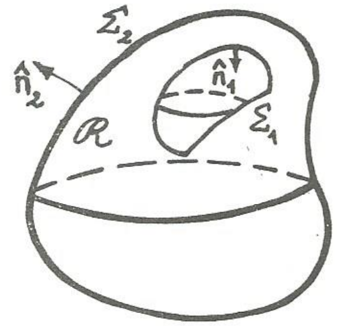
$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot F\, dV = \oint_{\Sigma} \hat{n} \cdot F\, dS = \oint_{\Sigma} F \cdot dS$$

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla U\, dV = \oint_{\Sigma} \hat{n}\, U\, dS = \oint_{\Sigma} U\, dS$$

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \wedge \mathbf{F}\, dV = \oint_{\Sigma} \hat{n} \wedge \mathbf{F}\, dS = \oint_{\Sigma} d\mathbf{S} \wedge \mathbf{F}$$

أي للانتقال من التكامل الحجمي الى السطحي يكفي استبدال ∇ بالشعاع $\hat{n}$.

٢ – ٤ – ٤ تعميم



الشكل (٥ ب)

يمكن تعميم هذه النظريات على الحالة التي يتألف فيها Σ من سطحين موجهين مغلقين منفصلين يقع احدهما ضمن الآخر (الشكل ٥ ب) أو أكثر، ويحسب التكامل السطحي كمجموع تكاملات تقدر على كل سطح بانفراد ويحسب التكامل الحجمي في المنطقة الفراغية $\mathcal{R}$ المحددة بهذه السطوح على أن يوجه الناظم الى خارج $\mathcal{R}$.

٢ – ٥ نظرية ستوكس لتحويل تكامل سطحي الى خطي وبالعكس

ليكن Σ سطحاً موجهاً مفتوحاً وحافته Γ منحن فراغي موجه مغلق ، وليكن $\mathbf{F} \in C^1$ تابعاً شعاعياً للموضع في نطاق فراغي $\mathcal{D}$ يحوي السطح Σ . ان تدفق دوران $\mathbf{F}$ عبر Σ مساو لجولان $\mathbf{F}$ حول Γ أي أن :

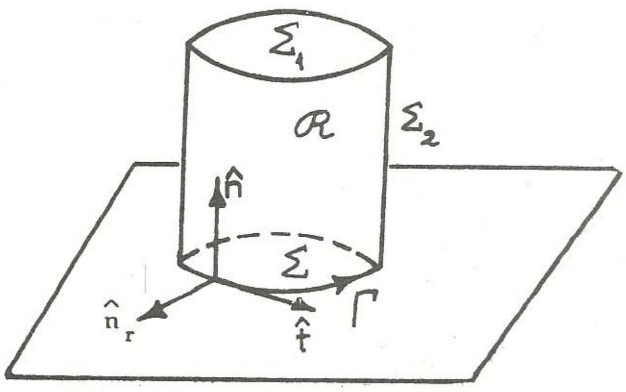
$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

البرهان : نقتصر في برهاننا على سطح صقيل Σ يحده المنحني Γ والبرهان يمكن تعميمه على سطح صقيل جزئياً وذلك بأخذ كل جزء صقيل على انفراد .

نبرهن أولا على صحة النظرية في حالة منحن مستو Γ وشعاع توجيه مماسه $\hat{t}$ ويحد سطحاً مستوياً موجهاً Σ مساحته S . في هذه الحالة يكون الناظم $\hat{n}$ على السطح Σ شعاعاً ثابتاً .

ننشيء على السطح Σ اسطوانة قائمة ارتفاعها h تحد منطقة فراغيـــة $\mathcal{R}$ ونرمز لسطحها الكلي بالرمز Σ_r ولمساحتها بالرمز S_r وللناظم عليها بالرمز $\hat{n}_r$ حيث $\hat{n}_r$ هو موجه الى خارج $\mathcal{R}$ دوما، فيكون عنصر المساحة الموجه عليها هو $d\,\mathbf{S}_r = \hat{n}_r\, d\, S_r$.

نرمز للقاعدة العليا للاسطوانة بالرمز Σ_1 ولسطحها الجانبي بالرمز Σ_2 (الشكل ٦) .



الشكل (٦)

بتطبيق نظرية غوص في التفرق على التابع الشعاعي $\mathbf{F} \wedge \hat{n}$ في المنطقـة $\mathcal{R}$ ينتـــج :

$$\int_{\mathcal{R}} [\nabla \cdot (\mathbf{F} \wedge \hat{n})]\, d\, V = \oint_{\Sigma_r} (\mathbf{F} \wedge \hat{n}) \cdot \hat{n}_r\, d\, S_r$$

$$-\int_{\Sigma} (F \wedge \hat{n}) \cdot \hat{n}_r \, dS_r + \int_{\Sigma_1} (F \wedge \hat{n}) \cdot \hat{n}_r \, dS_r +$$

$$\int_{\Sigma_2} (F \wedge \hat{n}) \cdot \hat{n}_r \, dS_r$$

ولكن $\hat{n}_r = \hat{n}$ على السطح Σ_1 كما أن $\hat{n}_r = -\hat{n}$ على السطح Σ فيختصر التكاملان على Σ , Σ_1 .

كذلك فان $\hat{n}_r = \hat{t} \wedge \hat{n}$ على السطح Σ_2 ويكون :

$$\text{(i)} \qquad \int_{\mathcal{R}} [\nabla \cdot (F \wedge \hat{n})] \, dV = \int_{\Sigma_2} (F \wedge \hat{n}) \cdot (\hat{t} \wedge \hat{n}) \, dS_r$$

ولكن :

$$(F \wedge \hat{n}) \cdot (\hat{t} \wedge \hat{n}) = F \cdot [\hat{n} \wedge (\hat{t} \wedge \hat{n})]$$

$$= F \cdot [(\hat{n} \cdot \hat{n}) \hat{t} - (\hat{n} \cdot \hat{t}) \hat{n}]$$

$$= F \cdot [\hat{t} - 0] = F \cdot \hat{t}$$

كما أن :

$$\nabla \cdot (F \wedge \hat{n}) = \hat{n} \cdot (\nabla \wedge F) - F \cdot (\nabla \wedge \hat{n}) = \hat{n} \cdot (\nabla \wedge F)$$

بتعويض الناتجين في (i) نحصل على :

$$\int_{\mathcal{R}} [(\nabla \wedge \mathbf{F}) . \hat{n}] dV = \int_{\Sigma_2} \mathbf{F} \cdot \hat{t} \, dS_r$$

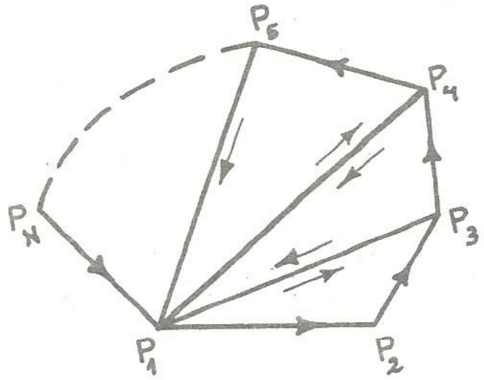
ولكن : $dV = dh\,dS$ ، $dS_r = dh\,ds$ فيكون :

$$\int_0^h [\int_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) . \hat{n} \, dS] dh = \int_0^h [\oint_{\Gamma} \mathbf{F} . \hat{t} \, ds] dh$$

وبما أن h طول اختياري فان :

$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{F} . d\mathbf{s} \qquad (2 \cdot 5 \cdot 1)$$

وهذه العلاقة صحيحة أياً كان شكل المنحني المستوي Γ المحدد للسطح Σ . لتعميم هذه النتيجة على الحالة التي يكون فيها Γ منحنياً فراغياً نأخذ مضلعاً Γ_N أضلاعه هي $\overline{P_1 P_2}$, $\overline{P_2 P_3}$, . . . , $\overline{P_N P_1}$ حيث P_1 , P_2 . . . , P_N هي نقـــاط متتالية على Γ ثم نعرف السطح Σ_N الذي يحده المضلع Γ_N بأنه كثير وجوه وأوجهه هي المثلثات التي أضلاعها هي المستقيمات المشكلة لاضلاع المضلع Γ_N والمستقيمات الواصلة بين النقطة P_1 والنقاط $P_2 , P_3 , \dots , P_{N-1}$ (الشكل ٧) .



الشكل (٧)

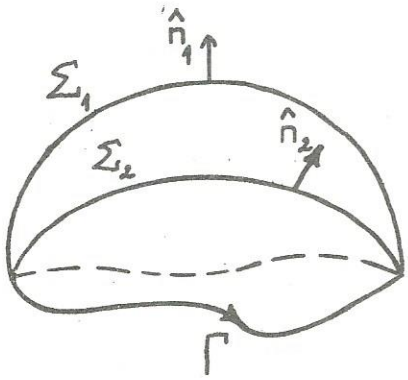
بتطبيق العلاقـة (2 . 5 . 1) على كل مثلث من هـذه المثلثات ،

وجمع النتائج بعد جعل $N \to +\infty$ بحيث ينتهي كل وتر $\overline{P_1 P_2}, \overline{P_2 P_3}, \ldots, \overline{P_N P_1}$ الى الصفر فان المضلع Γ_N يصبح المنحني Γ والسطح Σ_N يصبح السطح Σ والتكاملات الخطية العددية على الاضلاع $\overline{P_1 P_3}, \overline{P_1 P_4}, \ldots, \overline{P_1 P_{N-1}}$ تحسب مرتين في اتجاهين متعاكسين (الشكل ٧) فتختصر ولا يبقى الا التكامل الخطي العددي على Γ أما التكامل السطحي العددي فيصبح مقدراً على السطح الكلي Σ والعلاقة (2.5.1) تبقى صحيحة في حالة سطح مفتوح Σ يحده المنحني الفراغي Γ .

نتائج :

أولا) الانتقال من تكامل على سطح مفتوح الى سطح مفتوح آخر :

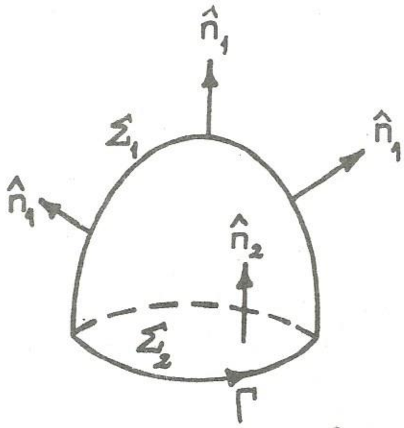
بفرض Σ_1 , Σ_2 سطحين موجهين مفتوحين يحدهما المنحني الفراغي الموجه Γ ويقعان في جهة واحدة بالنسبة للمنحني Γ (الشكل ٨) وهما واقعان في نطاق بسيط الاتصال $\mathcal{D}$ فان :



الشكل (٨)

$$\int_{\Sigma_1} (\nabla \wedge F) . dS_1 = \int_{\Sigma_2} (\nabla \wedge F) . dS_2 = \oint_{\Gamma} F . ds \qquad (2.5.2)$$

أي أن التكاملين السطحيين متساويان .



الشكل (٩)

ان العلاقـة (2.5.2) تبقى صحيحة اذا كان Γ منحنياً مستوياً يحد السطح المستوي Σ_2 (الشكل ٩) وفي هذه الحالة يكون $\hat{n}_2$ شعاعاً ثابتاً .

أما اذا كان Σ_1 , Σ_2 في جهتين مختلفتين بالنسبة للمنحني Γ فان :

$$\int_{\Sigma_1} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_1 = -\int_{\Sigma_2} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}_2 \qquad (2.5.3)$$



الشكل (١٠)

اذ يجب توجيه الحافة Γ للجزء Σ_1 بعكس طريقة توجيه الحافة Γ للجزء Σ_2 بحيث يبقى الناظم موجها الى خارج السطح المغلق Σ المؤلف من هذين الجزئين (الشكل ١٠) ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

$$\oint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (2.5.4)$$

أياً كان التابع F . يمكن أن نبرهن العلاقة (2.5.4) بطريقـة أخرى وذلك بتطبيق نظرية غوص في التفرق على منطقة فراغية يحدها السطح الموجه المغلق Σ .

ثانيا) نظرية غرين في المستوي :

في الحالة الخاصة التي يكون فيها Γ منحنياً مستوياً واقعـاً في المستوي $z = 0$ (الشكل ١١) فان :

$$\mathbf{ds} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$$

$$\mathbf{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j}$$

ومنه :

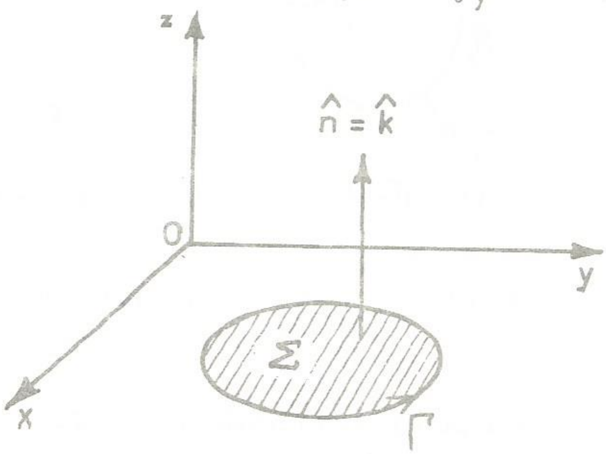
$$\text{(ii)} \qquad \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds} = F_x\,dx + F_y\,dy$$

كما أن :

$$\mathbf{dS} = \hat{k}\,dx\,dy \qquad\qquad \nabla \wedge \mathbf{F} = \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

ومنه :

$$\text{(iii)} \qquad (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{dS} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$



الشكل (١١)

بتعويض (ii) , (iii) في العلاقة (2.5.1) ينتج :

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{\Gamma} \left(F_x\, dx + F_y\, dy \right)$$

حيث Γ هو منحن مستو موجه في الاتجاه الموجب . تدعى هذه الحالة الخاصة من نظرية ستوكس بنظرية غرين في المستوي ، ويجب أن نلاحظ أن F_x , F_y يجب أن تكون لهما مشتقات أولى مستمرة .

٢ — ٦ نظرية غرين

اذا كانت $U \in C1^2$, $W \in C1^2$ توابع عددية للموضع في منطقة فراغيـــة $\mathcal{R}$ محاطة بسطح موجه مغلق Σ فان :

$$\oint_{\Sigma} (U \nabla W - W \nabla U) \cdot \mathbf{dS} = \int_{\mathcal{R}} (U \nabla^2 W - W \nabla^2 U)\, dV$$

أو :

$$\oint_{\Sigma} \left(U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \int_{\mathcal{R}} (U \nabla^2 W - W \nabla^2 U)\, dV$$

حيث $\frac{\partial W}{\partial n}$ و $\frac{\partial U}{\partial n}$ تمثل مشتقين موجهين وفق $\hat{n}$.

البرهان : من نظرية غوص في التفرق لدينا :

$$(i) \qquad \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \qquad , \qquad (\mathbf{F} \in C1^1)$$

بوضع $F = U \nabla W$ (حيث $F = U \nabla W \in C l^1$ فرضاً) في (i) ينتج :

$$\oint_{\Sigma} (U \nabla W) . d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} \nabla . (U \nabla W) \, dV$$

$$\oint_{\Sigma} (U \nabla W) . d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} (\nabla U . \nabla W) \, dV + \int_{\mathcal{R}} U \nabla^2 W \, dV \tag{2.6.1}$$

بوضع $F = W \nabla U$ (حيث $F = W \nabla U \in C l^1$ فرضاً) في (i) ينتج :

$$\int_{\Sigma} (W \nabla U) . d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} (\nabla W . \nabla U) \, dV + \int_{\mathcal{R}} W \nabla^2 U \, dV \tag{2.6.2}$$

بطرح (2 . 6 . 2) من (2 . 6 . 1) ينتج :

$$\oint_{\Sigma} (U \nabla W - W \nabla U) . d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} (U \nabla^2 W - W \nabla^2 U) \, dV \tag{2.6.3}$$

والتكامل الحجمي موجود لأن $W \in C l^2$, $U \in C l^2$. بما أن :

$$(\nabla W) \cdot (d\mathbf{S}) = (\nabla W) . (\hat{n} \, dS) = [(\hat{n} . \nabla) W] \, dS = \frac{\partial W}{\partial n} dS$$

كما أن $\nabla U . dS = \frac{\partial U}{\partial n} dS$ فيمكن وضع (2.6.3) بالشكل :

$$\oint_{\Sigma} \left(U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \tag{2.6.4}$$

$$= \int_{\mathcal{R}} \left(U \nabla^2 W - W \nabla^2 U \right) dV$$

نتيجة :

اذا كان W , U توافقيين (أي $\nabla^2 U = \nabla^2 W = 0$) فان :

$$\oint_{\Sigma} \left(U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0$$

تعميم :

يمكن تعميم هذه النظرية على الحالة التي يتألف فيها Σ من سطحين موجهين مغلقين منفصلين يقع احدهما داخل الآخر (أو أكثر) ويحسب التكامل السطحي كمجموع تكاملات تقدر على كل سطح على انفراد ، ويحسب التكامل الحجمي في المنطقة الفراغية $\mathcal{R}$ المحددة بهذه السطوح ، على أن يوجه الناظم الى خارج $\mathcal{R}$.

٢ – ٧ علاقة غرين

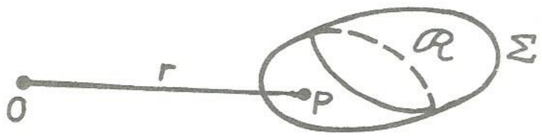
اذا كانت O نقطة ثابتة وكان r بعد نقطة متحولة P عنها وهذه النقطة المتحولة تنتمي الى منطقة فراغية $\mathcal{R}$ يحدها السطح الموجـــه المغلق Σ فان $U = 1/r$ تابع عددي للموضع في $\mathcal{R}$ وهو تابع توافقي .

عندما تكون O خارج $\mathcal{R}$

(الشكل ١٢) يكون :

$$U = \frac{1}{r} \in C\,l^2$$

في $\mathcal{R}$ وبفرض $W \in C\,l^2$ في هذه المنطقة ، فانه يمكن تطبيق نظرية غرين للحصول على :



الشكل (١٢)

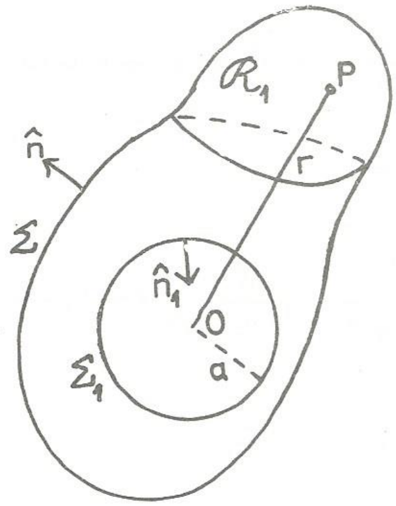
$$\oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] dS = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{r} \nabla^2 W \right) dV \qquad (2.7.1)$$

واذا كان W تابعاً توافقياً في $\mathcal{R}$ فينتج :

$$\oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] dS = 0 \qquad (2.7.2)$$

ولكن عندما تكون O داخل $\mathcal{R}$ فان التابع $U = 1/r$ يصبح لانهائيـــاً في النقطة O ولا يمكن تطبيق نظرية غرين عندئذ. في هذه الحالة نستثني من $\mathcal{R}$ جواراً للنقطة O التي يصبح فيها التابع $1/r$ غير محدود (الشكل ١٣) وهـذا الجوار واقع داخل الكرة التي مركزها O ونصف قطرها a وسطحها Σ_1 . يمكن عندئـذ تطبيق نظرية غرين على المنطقة $\mathcal{R}_1$ (المحاطة بالسطحين المغلقين الموجهين Σ , Σ_1) على أن

نقدر التكاملات السطحية على Σ و Σ_1 والتكامل الحجمي يقدر في $\mathcal{R}_1$ (الشكل ١٣) . بما أن الناظم موجه دوماً الى خارج المنطقة فيكون الناظم $\hat{n}_1$ على Σ_1 موجهاً نحو O . من نظرية غرين ينتج :



الشكل (١٣)

$$(i) \qquad \oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] dS$$

$$+ \oint_{\Sigma_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n_1} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n_1} \right] dS_1 = \int_{\mathcal{R}_1} \frac{1}{r} \nabla^2 W \, dV$$

على Σ_1 لدينا :

$$\left. \frac{\partial (1/r)}{\partial n_1} \right|_{r=a} = - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=a} = \frac{1}{a^2} \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a}$$

فيكون :

$$(ii) \qquad \oint_{\Sigma_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n_1} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n_1} \right] dS_1 =$$

$$\frac{1}{a} \oint_{\Sigma_1} \frac{\partial W}{\partial n_1} dS_1 - \frac{1}{a^2} \oint_{\Sigma_1} W \, dS_1$$

عندما $a \longrightarrow 0$ وبما أن W ، $\frac{\partial W}{\partial n_1}$ تبقى محدودة على السطح Σ_1 فان :

$$\lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a} \oint_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial W}{\partial n_1} \right) d S_1 \right] =$$

$$\lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\partial W}{\partial n_1} \right)_O 4 \pi a^2 \right] = 0$$

$$\lim_{a \to 0} \left[- \frac{1}{a^2} \oint_{\Sigma_1} W d S_1 \right] =$$

$$\lim_{a \to 0} \left[- \frac{1}{a^2} (W)_O 4 \pi a^2 \right] = - 4 \pi W_O$$

حيث $(W)_O$ ، $\left(\frac{\partial W}{\partial n_1} \right)_O$ هي على الترتيب قيم W ، $\frac{\partial W}{\partial n_1}$ مقدرة في النقطة O .

بتعويض النهايات الناتجة في (ii) نحصل على :

$$\lim_{a \to 0} \oint_{\Sigma_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n_1} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n_1} \right] d S_1 = - 4 \pi (W)_O$$

وبتعويض القيمة الأخيرة في (i) لنتج علاقة غرين :

$$\oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] d S = \tag{2.7.3}$$

$$4 \pi (W)_O + \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{r} \nabla^2 W d V$$

إذ أن $\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}$ عندما $a \rightarrow 0$.

عندما يكون W تابعاً توافقياً في $\mathcal{R}$ فان :

$$\oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (1/r)}{\partial n} \right] dS = 4\pi (W)_O \qquad (2.7.4)$$

نتيجة : من العلاقتين (2 . 7 . 2) , (2 . 7 . 4) ينتج أن :

$$(2.7.5) \begin{cases} \oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \nabla W - W \nabla \frac{1}{r} \right] \cdot d\mathbf{S} = 0 & (O \text{ خارج } \Sigma) \\ \oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \nabla W - W \nabla \frac{1}{r} \right] . d\mathbf{S} = 4\pi (W)_O \ , & (O \text{ داخل } \Sigma) \end{cases}$$

حيث W هو تابع توافقي في المنطقة المحاطة بالسطح Σ .

٢ – ٨ تكامل غوص والزاوية المجسمة

عندما $W = 1$ يكون $\nabla W = 0$ وبتعويض هاتين القيمتين في النتيجة السابقة يكون :

$$(2.8.1) \begin{cases} - \oint_{\Sigma} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) . d\mathbf{S} = 0 \ , & (O \text{ خارج } \Sigma) \\ - \oint_{\Sigma} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) . d\mathbf{S} = 4\pi \ , & (O \text{ داخل } \Sigma) \end{cases}$$

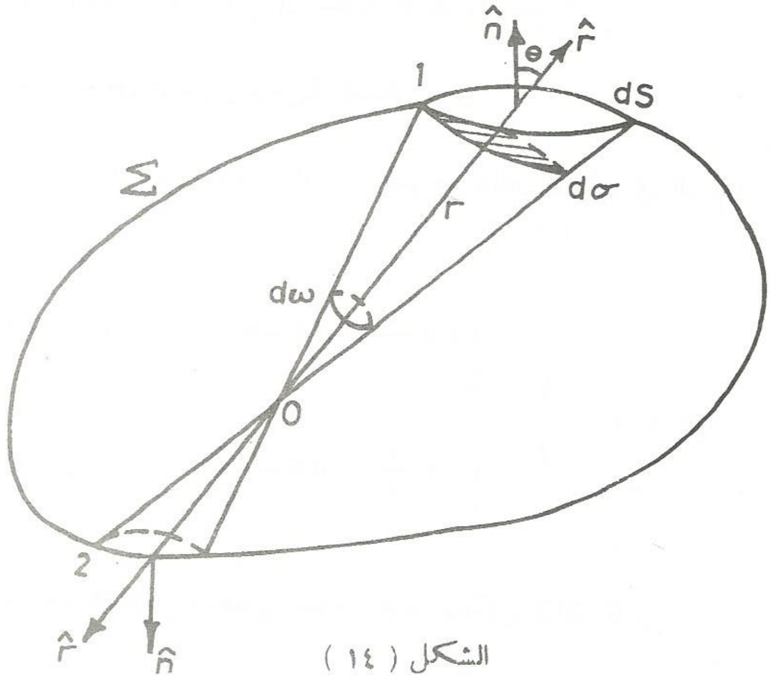
يدعى هذا التكامل السطحي بتكامل غوص وتمكن كتابته كما يلي :

$$-\oint_{\Sigma} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} \frac{1}{r^2}\, \hat{r} . \hat{n}\, dS = \oint_{\Sigma} \frac{\hat{r} . \hat{n}\, dS}{r^2}$$

وينتج من (1 . 8 . 2) أن تكامل غوص ينعدم اذا كانت O (مبدأ قياس شعاع الموضع $\mathbf{r} = r\,\hat{r}$) خارج Σ وأن قيمته تساوي 4π اذا كانت O داخل Σ .

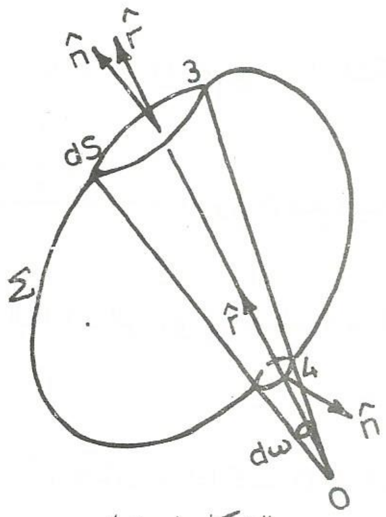
التأويل الهندسي لتكامل غوص ـ الزاوية المجسمة

ليكن d S عنصر المساحة المجاور لنقطة شعاع موضعها $\mathbf{r} = r\,\hat{r}$ وليكن $\hat{n}$ الناظم على السطح المغلق Σ والموجه دوماً الى خارج السطح . اذا وصلنا جميع نقاط المنحني المحيط بالعنصر d S الى نقطة ثابتة داخلية O فيتشكل مخروط كامل ذروته O (الشكل ١٤) واذا وصلناها الى نقطة ثابتة خارجية فيتشكل نصف مخروط (الشكل ١٥) .



الشكل (١٤)

لتكن $d\sigma$ المساحة التي يقطعها هذا المخروط من كرة مركزها O ونصف قطرها r . تعرف الزاوية المجسمة $d\omega$ المقاسة بالراديان المجسم والتي يرى بهـا العنصر dS من O بأنها :



الشكل (١٥)

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \pm \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \pm \frac{\hat{r}\cdot\hat{n}\,dS}{r^2}$$

حيث θ هي الزاوية بين $\hat{n}$, $\hat{r}$ على أن نأخذ اشارة الزائد عندمـا تكون θ حادة واشارة الناقص عندما تكون θ منفرجـة وذلك لان $d\sigma$, dS مقداران موجبان .

اذا كانت O داخل Σ (الشكل ١٤) نرى أنـه في الوضع 1 و 2 يكون $d\omega = + \frac{\hat{r}.\hat{n}\ \ dS}{r^2}$ ومنه عند ايجاد الزاوية الكلية التي يرى بها السطح Σ من O (أي عند حساب $\omega = \oint_{\Sigma} \frac{\hat{r}.\hat{n}\,dS}{r^2}$) نجمع هذه المقادير فيكون :

$$\omega = \int_{\text{سطح الكرة}} \frac{d\sigma}{r^2} = 4\pi$$

أما اذا كانت O خارج Σ (الشكل ١٥) نرى أنه في الوضع 3 يكون

$d\omega = + \dfrac{\hat{r} \cdot \hat{n}\, dS}{r^2}$ وفي الوضع 4 يكون $d\omega = - \dfrac{\hat{r} \cdot \hat{n}\, dS}{r^2}$ وعند ايجاد

الزاوية الكلية ω التي يرى بها السطح Σ من O فهذه المقادير تختصر ويكون :

$$\omega = 0$$

يجب أن نلاحظ أنه اذا كانت O على السطح Σ فان :

$$\omega = 2\pi$$

اذ يتم اسقاط السطح عندئذ على نصف كرة .

الخلاصة ان الزاوية المجسمة التي يرى بها سطح موجه مغلق من نقطة ثابتة تساوي 4π اذا كانت النقطة داخله ، وتساوي الصفر اذا كانت النقطة خارجه ، وتساوي 2π اذا كانت النقطة واقعة عليه .

امثلة (٢)

مثال ٢ – ١ – ١

اذا كانت **F** قوة مستمرة ومتحولة من نقطة لأخرى على منحن فراغي Γ موجه وصقيل أو صقيل جزئياً يصل بين النقطتين A و B فان التكامل الخطي العددي $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ هو العمل الذي تقوم به هذه القوة لدى انتقال نقطة تأثيرها على Γ من A الى B .

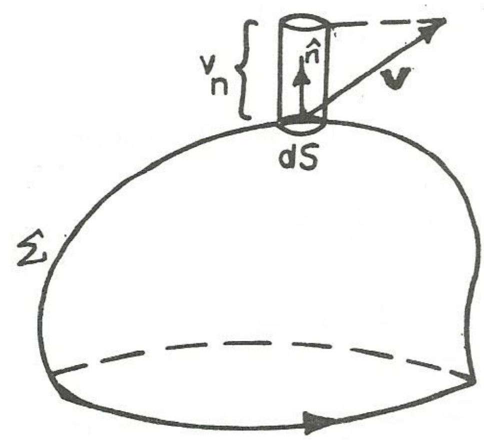
اذا كان : $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \qquad (\mathbf{F} \in Cl^1)$

في نطاق فراغي بسيط الاتصال $\mathcal{D}$ يحوي المنحني Γ فان **F** شعاع كموني يستنتج من كمونه U بالعلاقة $\mathbf{F} = \nabla U$ ويكون التكامل الخطي العددي مستقلاً عن مساره في $\mathcal{D}$ وقيمته هي :

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = U_B - U_A$$

أي فرق الكمون بين النقطتين A , B .

مثال ٢ – ٢ – ١



اذا ثبت السطح الموجه الصقيل Σ في سائل سرعته المستمرة **v** تابعة الموضع فقط ، فان التكامل السطحي العددي :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

هو حجم السائل الذي يعبر هذا السطح في وحدة الازمنة اذ يتضح من الشكل أن حجم السائل

الذي يعبر عنصر المساحة $d S$ في وحـدة الازمنة هو :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = (\mathbf{v} \cdot \hat{n})\, dS = v_n\, dS$$

حيث v_n هي المركبة الناظمية للسرعة ، فيكون الحجم الكلي للسائل الذي يعبر السطح Σ هو $\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\Sigma} v_n\, d\mathbf{S}$ ويجب أن نلاحظ أن Σ سطح افتراضي وليس حاجزاً مادياً كتيماً .

مثال ٢ – ٤ – ١ اذا كان Σ سطحاً موجهاً صقيلا مغلقاً يحد منطقة فراغية $\mathcal{R}$ لا تشمل مبدأ الاحداثيات ، واذا كان $\mathbf{r}$ هو شعاع موضع نقطة من هذه المنطقـــة فبرهن أن :

$$\oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{dS}}{r^2} = \int_{\mathcal{R}} \frac{dV}{r^2}$$

الحل : بما أن التابع الشعاعي للموضع $\mathbf{r}/r^2$ ذو مشتق مستمر في المنطقة $\mathcal{R}$ وبما أن السطح الموجه Σ مغلق وصقيل ، فينتج من وضع $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$ في نظريـــة غوص في التفرق أن :

$$(i) \qquad \oint_{\Sigma} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \mathbf{dS} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2}\, \mathbf{r} \right) dV$$

ومن قواعد الاشتقاق لدينا :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2}\, \mathbf{r} \right) = \left(\nabla \frac{1}{r^2} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} (\nabla \cdot \mathbf{r})$$

$$= -\frac{2}{r^3}\, \hat{r} \cdot r\, \hat{r} + \frac{1}{r^2}(3) = \frac{1}{r^2}$$

بتعويض الناتج في (i) ينتج المطلوب .

مثال ٢-٤-٢ احسب قيم الثوابت c , b , a لكي يكون التابع الشعاعي للموضع :

$$(x + cy + az)\hat{i} + (x + y^2 + bz)\hat{j} + (cy + z^2)\hat{k}$$

كمونيا في اى نطاق فراغي بسيط الاتصال ثم احسب تدفق التابع الشعاعي الناتج عبر السطح الموجه المغلق المعين بالمعادلات :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad z = 0 \quad , \quad z = 2$$

<u>الحل :</u>

التابع المعطى مستمر المشتقات لان مركباته كثيرات حدود ودورانه هو :

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + cy + az & x + y^2 + bz & cy + z^2 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}(c - b) + \hat{j}(a) + \hat{k}(1 - c)$$

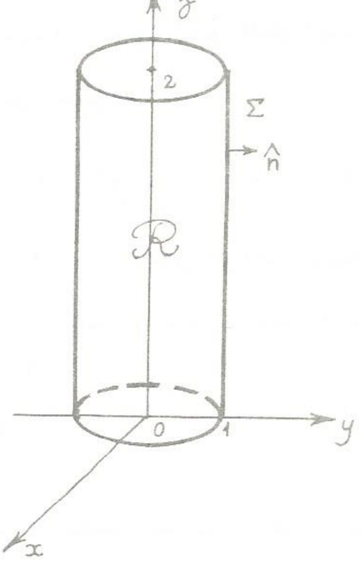
ويكون التابع كمونيا اذاكان:

$$\hat{i}(c - b) + \hat{j}(a) + \hat{k}(1 - c) \equiv 0$$

وبالمطابقة ينتج ان $a = 0 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 1$

والتابع الناتج هو :

$$F = (x + y)\hat{i} + (x + y^2 + z)\hat{j} + (y + z^2)\hat{k}$$



ان السطح $x^2+y^2=1$ هو اسطوانة دورانية قائمة محورها محور z ونصف قطر دائرة الدليل هو 1 .

اما $z=0$, $z=2$ فهما مستويان عموديان على محور الاسطوانة والسطح الموجه المغلق Σ يحيط بمنطقة فراغية $\mathcal{R}$ وهما مبينان في الشكل المرافق .

ان Σ سطح مقيل جزئيا (يتكون من اسطوانة مقيلة ومستويين) وهو سطح مغلق موجه الى خارج المنطقة الفراغية المحددة $\mathcal{R}$ كما ان $F \in C\ell^1$ في $\mathcal{R}$ فينتج من نظرية غوص في التفرق ان التدفق المطلوب هو :

$$\oint_{\Sigma} F . dS = \iiint_{\mathcal{R}} (\nabla . F)\, dV$$

$$= \iiint_{\mathcal{R}} (1+2y+2z)\, dV$$

$$= \iiint_{\mathcal{R}} (1+2\rho \sin\phi + 2z)\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho\, d\rho \int_{z=0}^{z=2} (1 + 2\rho \sin\phi + 2z)\, dz$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{\rho=0}^{\rho=1} (6\rho + 4\rho^2 \sin\phi)\, d\rho$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \left(3 + \frac{4}{3} \sin\phi\right) d\phi = 6\pi$$

وقد استخدمنا الاحداثيات الاسطوانية لوجود تناظر محورى .

مثال ٢-٤-٣ ليكن

$$\mathbf{F} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\hat{r} + (r \cos\theta)\,\hat{\theta} + \left(\frac{1}{r} \cos\phi\right)\hat{\phi}$$

حيث (r, θ, ϕ) هي الاحداثيات الكروية لنقطة من المنطقة $\mathcal{R}$ المحاطة بالسطح الموجه Σ المعين بالمعادلة الديكارتية

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0.25 \quad .$$

تأكد من تحقق شروط وجود التكامل $\oint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F} \;.\, d\mathbf{S}$

ثم احسب قيمته .

<u>الحـل</u>: من قانون حساب الدوران في الاحداثيات الكروية ينتج :

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \left(\frac{\cos\theta \cos\phi}{r^2 \sin\theta}\right)\hat{r} + (2\cos\theta)\,\hat{\phi}$$

ان المنطقة $\mathcal{R}$ محددة ومحاطة بالكرة المفروضة والواقعة بكليتها في الثمن الموجب اى ان :

$$r \neq 0 \quad , \quad \sin\theta \neq 0$$

فيكون الدوران موجودا في $\mathcal{R}$.

بما ان Σ سطح مغلق موجه وصقيل (لانه كرة) والناظم عليه $\hat{n}$ موجه الى خارج وبما ان $\nabla \wedge \boldsymbol{F} \in cl^1$ في $\mathcal{R}$ كما هو واضح من قانون حسابه فيمكن تطبيق نظرية التحويل الاولى (نظرية غوص في التفرق) اى :

$$\oint_{\Sigma} (\nabla \wedge \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{F}) \, dV$$

$$= 0$$

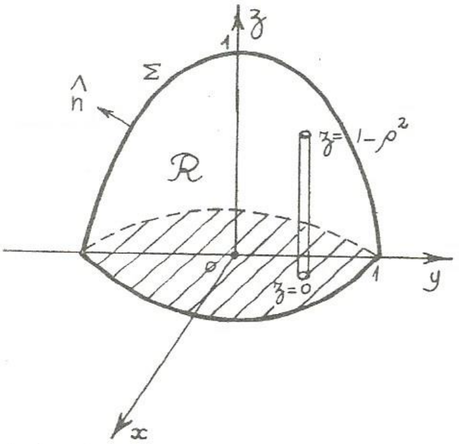
وذلك لانه من خواص المشتقات الشعاعية من المرتبة الثانية يكون :

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{F}) \equiv 0$$

مثال ٢-٤-٤ احسب تدفق التابع $F = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^2\hat{k}$

عبر السطح الموجه المغلق المعين بالمعادلتين :

$$z = 0 \qquad , \qquad z = 1 - (x^2 + y^2)$$



<u>الحل :</u> ان السطح Σ مبين في الشكل المرافق وهو سطح مغلق محدد صقيل جزئيا (يتكون من جزئين صقيلين هما مجسم قطع مكافىء دوراني ومستو) والناظم $\hat{n}$ موجه الى خارج المنطقة $\mathcal{R}$ المحاطة بهذا السطح .

ان تدفق F عبر Σ هو :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Sigma} (F \cdot \hat{n})\, dS = \oint_{\Sigma} f\, dS$$

ويمكن حساب التكامل السطحي الناتج بالاسقاط على المستوى $z = 0$ ولكن هذه الطريقة طويلة . يمكن تسهيل الحساب اذا حولناه الى تكامل حجمي باستخدام نظرية غوص في التفرق وشروط الشكل محققة كما ان التابع $F \in cl^1$ في $\mathcal{R}$ فيكون :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot F\, dV = \int_{\mathcal{R}} [3(x^2 + y^2) + 2z]\, dV$$

وبما ان المسألة ذات تناظر محوري نستخدم الاحداثيات الاسطوانية ويتم تعيين حدود المكاملة بالاستعانة بالشكل فنحصل على :

$$\iiint_{\mathcal{R}} \left[3\rho^2+2z\right]\rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{z=0}^{z=1-\rho^2} (3\rho^2+2z)\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 (\rho+\rho^3-2\rho^5)\, d\rho = \frac{5\pi}{6}$$

مثال ٢-٤-٥ اذا كان Σ سطحا محددا موجها مغلقا وصقيلا يحيط بمنطقة فراغية $\mathcal{R}$ واذا كان التابع $W \in cl^2$ توافقيا في $\mathcal{R}$ فبرهن ان :

$$\oint_{\Sigma} d\mathbf{S} = 0 \ , \ \oint_{\Sigma} \nabla W \cdot d\mathbf{S} = 0 \ , \ \oint_{\Sigma} d\mathbf{S} \wedge \nabla W = 0$$

الحل : ان السطح Σ والتابع $\nabla W \in cl^1$ يحققان الشروط كافة لنظريات التحويل من تكامل سطحي لحجمي .

- باستخدام النظرية الثانية وبفرض $u = 1$ فيها ينتج :

$$\oint_{\Sigma} (1)\, d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} (\nabla 1)\, dV = 0$$

وذلك لان $\nabla 1 = 0$.

- باستخدام النظرية الاولى وبفرض $u = \nabla W$ فيها ينتج :

$$\oint_{\Sigma} \nabla W \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\nabla W)\, dV = \int_{\mathcal{R}} \nabla^2 W\, dV = 0$$

وذلك لان $\nabla^2 W \equiv 0$ في $\mathcal{R}$ لانه توافقي فرضا .

- باستخدام النظرية الثالثة وبفرض $\mathbf{F} = \nabla W$ فيها ينتج :

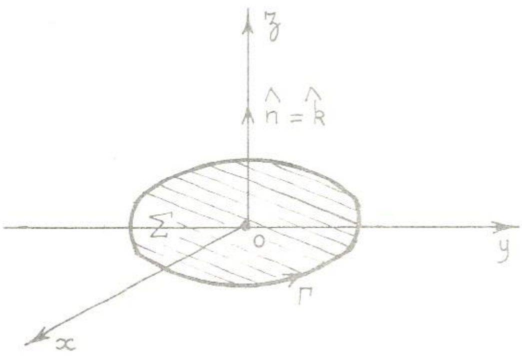
$$\oint_{\Sigma} d\mathbf{S} \wedge \nabla W = \int_{\mathcal{R}} \nabla \wedge (\nabla W)\, dV = 0$$

وذلك لان $\nabla \wedge (\nabla W) \equiv 0$ دوما .

مثال ٢-٥-١ اذا كان $u \in cl^2$ تابعا عدديا اختياريا للموضع فاحسب تدفق دوران التابع الشعاعي للموضع :

$$F = (2y^3+z)\hat{i} + (-x^2y)\hat{j} + (xy^2z^2)\hat{k} + \nabla u$$

عبر السطح الموجه المستوي $x^2+y^2 \leq 1$.



<u>الحل :</u> الشكل يبين السطح Σ وهو المنطقة الدائرية $x^2+y^2 \leqslant 1$ والسطح مفتوح موجه وصقيل حافته Γ منحن موجه مغلق صقيل (لانه دائرة ومركزها O ونصف قطرها 1)

وقد تم توجيه الناظم $\hat{n}$ وفق قاعدة البزال اما توجيه الحافة فهو عكس دوران عقارب الساعة .

ان $F \in cl^1$ في نطاق $\mathcal{D}$ يحوى Σ وذلك لان :

$$\nabla u \in cl^1 \iff u \in cl^2$$

ولان القسم المتبقي من F مركباته كثيرات حدود فلـه مشتقات اولى مستمرة في $\mathcal{D}$.

وبذلك تتحقق شروط نظرية ستوكس جميعها وينتج تدفق دوران التابع من :

$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge F) \cdot dS = \oint_{\Gamma} F \cdot ds$$

والطرف الايمن هو جولان التابع حول المنحني Γ الذى عنصـــــر قوسه الموجه هو ds .

في المستوى xy يكون :

$$F \cdot ds = \left[\hat{i}(2y^3 + 0) + \hat{j}(-x^2 y) + \hat{k}(x y^2 0 \;)\right] \cdot \left[\hat{i}\, dx + \hat{j}\, dy\right]$$
$$+ \nabla u \cdot ds$$
$$= 2y^3\, dx - x^2 y\, dy + du$$

$$\oint_{\Gamma} F \cdot ds = \oint_{x^2+y^2=1} (2y^3 dx - x^2 y\, dy) + \oint_{x^2+y^2=1} du$$

$$= \oint_{x^2+y^2=1} (2y^3 dx - x^2 y\, dy)$$

نفرض $x = \cos t$, $y = \sin t$ فيكون :

$$\oint_{\Gamma} F \cdot ds = -2\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t \sin t\, dt$$

$$= -2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{-3\pi}{2}$$

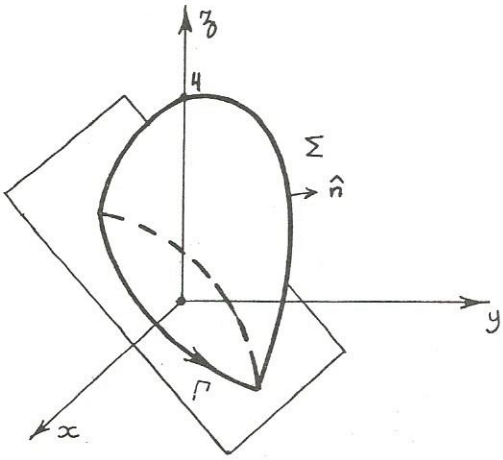
مثال ٢-٥-٢

برهن ان $F = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ تابع شعاعي كموني في اى نطاق فراغي بسيط الاتصال ثم احسب جولانه حول المنحني الموجه الناتج من تقاطع المستوى $x + y + z = 0$

مع السطح $z = 4 - x^2 - y^2$.

الحل : ان F تابع شعاعي كموني في اى نطاق فراغي بسيط الاتصال لان $F \in cl^1$ دوما (مركباته كثيرات حدود) كما ان :

$$\nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \equiv 0$$



ان السطح Σ المبين في الشكل المرافق هو جزء من مجسم القطع المكافيء الدوراني وهو $z = 4 - x^2 - y^2$ سطح محدد موجه مفتوح صقيل وبسيط في الاتجاه z وقد رسم منحني تقاطعه Γ مع المستوى $x + y + z = 0$ وهذا المنحني المستوى مغلق وموجه عكس عقارب الساعة وصقيل (ناتج عن تقاطع سطح صقيل ومستو) .

باستخدام نظرية ستوكس ولتحقق شروطها كافة ينتج ان الجولان هو :

$$\oint_{\Gamma} F \cdot ds = \int_{\Sigma} (\nabla \wedge F) \cdot dS = 0$$

وذلك لان $\nabla \wedge F \equiv 0$ في اى نطاق فراغي يحوى Σ .

<u>طريقة اخرى :</u>

ان F كموني في نطاق يحوى المنحني الموجه المغلق Γ ولذا فان جولانه حول Γ ينعدم .

مثال ٢-٧-١

ليكن Σ سطحا موجها مغلقا محددا ومقيلا يحيط بمنطقة فراغية $\mathcal{R}$ وليكن الناظم $\hat{n}$ موجها الى خارج $\mathcal{R}$.

ليكن $u, w \in cl^2$ في $\mathcal{R}$

حيث u هو تابع توافقي .

اذا كانت قيمة u على Σ هي $\frac{1}{r}$ حيث r بعد نقطة من السطح عن نقطة ثابتة O تقع داخله فبرهن ان :

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{r} - u\right) \nabla^2 w \, dV = -4\pi (w)_0$$

حيث $(w)_0$ هي قيمة w مقدرة في النقطة O .

الحـــل :

ان شروط نظرية غريـــن محققة لاجل السطح المفروض Σ والتـابعين W و U فينتج منها ان :

$$(i) \quad \oint_{\Sigma} \left[U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS = \int_{\mathcal{R}} U \nabla^2 W \, dV$$

وذلك لان $\nabla^2 U = 0$ في $\mathcal{R}$.

ان شروط علاقــة غــرين محققة لاجل السطح المفروض Σ والتـابعين W و $\frac{1}{r}$ فينتج من القانون $(2.7.3)$ ان :

$$(ii) \quad \oint_{\Sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{r} \nabla^2 W \, dV + 4\pi (W)_0$$

بطرح (i) من (ii) ينتج ان :

$$\oint_{\Sigma} \left[\left(\frac{1}{r} - U\right) \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial (\frac{1}{r} - U)}{\partial n} \right] dS =$$

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{r} - U\right) \nabla^2 W \, dV + 4\pi (W)_0$$

وبما ان $\frac{1}{r} - U = 0$ على السطح Σ

بينما $\frac{1}{r} - U \neq 0$ داخل $\mathcal{R}$ فان

$$0 = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{r} - U\right) \nabla^2 W \, dV + 4\pi (W)_0$$

ومنه : $\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{r} - U\right) \nabla^2 W \, dV = -4\pi (W)_0$

مســـــــائل (٢)

في المسائل التالية يجب التأكد من تحقق الشروط جميعهـا فـي نظريات التحليل الشعاعي قبل استخدامها كما يجب التأكد مـن تحقـق شـروط وجـود التراكيب قبل حسابهـا .

١) احسب تدفق التابع الشعاعي للموضع $r\,\mathbf{r}$ عبر السطح الموجه للكـرة $x^2+(y-1)^2+z^2=1$.

الجواب : 20.106

٢) ليكن $u=\rho(\sin\phi-\cos\phi)+\sqrt{\rho^2+z^2}$ تابعا عدديا للموضع حيث (ρ,ϕ,z) هي الاحداثيات الاسطوانية لنقطة من المنطقة الفراغية $\mathcal{R}$ المحاطة بالسطح الموجه Σ والمعين بالمعادلات الديكارتية :

$$z=0 \quad , \quad z=1 \quad , \quad (x-1)^2+(y-1)^2=1$$

برهن ان :

$$\oint_{\Sigma} d\mathbf{s}\wedge\nabla u = \mathbf{0}$$

٣) احسب جولان التابع الشعاعي للموضع $\mathbf{F}=2y\hat{i}+3x\hat{j}-z^2\hat{k}$ حول المنحني الموجه الناتج من تقاطع السطحين $z=0$ ، $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

الجواب : 28.27

٤) ليكن $\mathcal{D}$ نطاقا فراغيا محددا بسيط الاتصال يشمل المبدأ O
وليكن $\mathbf{r}$ شعاع موضع نقطة من هذا النطاق .

المطلوب هو :

آ) برهن ان $r^3\mathbf{r}$ هو تابع شعاعي كموني في $\mathcal{D}$ واوجد كمونه العددى W باهمال الثابت الاختياري .

ب) احسب $\nabla^2 W$

جـ) برهن ان

$$\oint_{\Sigma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n}\right]dS = \int_{\mathcal{R}} 6r^2\,dV$$

حيث Σ هو السطح الموجه المحدد والصقيل للمنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ و $\hat{n}$ هو شعاع توجيه الناظم على هذا السطح .

الجواب : آ) $W = \frac{r^5}{5}$ ب) $6r^3$

٥) ليكن Σ سطحا موجها مغلقا محددا وصقيلا جزئيا مساحته S ويحيط بمنطقة فراغية $\mathcal{R}$ حجمها V حيث $\hat{n}$ هو شعاع توجيه الناظم على السطح وليكن $\mathbf{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ شعاع موضع نقطة من $\mathcal{R}$ حيث O تقع خارج $\mathcal{R}$.

اذا كان $u \in cl^2$ و $W = \frac{1}{r}$ في $\mathcal{R}$ فبرهن ان :

آ) $\int_{\mathcal{R}} \nabla\cdot\hat{n}\,dV = S$ ب) $\oint_{\Sigma} d\mathbf{S}\wedge(u\nabla u) = \mathbf{0}$

جـ) $\oint_{\Sigma} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = 3V$ د) $\oint_{\Sigma}\frac{\partial W}{\partial n}dS = 0$

هـ) $$\oint_{\Sigma} x\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}} 4x\,dV$$

٣ - تطبيقات التحليل الشعاعي

ندرس فيما يلي بعض تطبيقات التحليل الشعاعي لاظهار المدلول المـــادي لبعض التراكيب التي عرفناها .

ان التوابع العددية والشعاعية للوضع أو للوضع والزمن معاً المذكورة في هذه التطبيقات هي توابع مستمرة ، ولها مشتقات مستمرة من المرتبة المستخدمة فيها مالم يذكر خلاف ذلك ، كما أن السطوح الموجهة المغلقة أو المفتوحـــة هي السطوح التي عرفناها في البحث السابق .

٣ – ١ تحريك المائع المثالي

٣ – ١ – ١ تعريف المائع المثالي

ان المائع المثالي هو وسط متصل غير متماسك تؤول فيه القوى الداخلية الى ضغط ناظمي على كل سطح مغلق موجود داخل الوسط سواء أكان المائع في وضع توازن أم في حركة .

ان المائع المثالي غير لزج اذ في حالة الموائع اللزجـــة المتحركة لا تكون القوى الداخلية عبر مستو (وهي قوى الاجهاد) ناظمية على هذا المستوي .

٣ – ١ – ٢ المشتق الموضعي والمشتق الكلي لتابع الموضع والزمن

ليكن U تابعاً عددياً الموضع والزمن معاً أي أن U تابع لشعاع الموضع $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ في النقطـــة المدروسة P (r) وتابع أيضاً للزمن t . يمكن التابع U (x , y , z , t) أن يتغير بالنسبة للزمن باحدى الطريقتين التاليتين :

أولا) اذا ركزنا انتباهنا على نقطة ثابتة P فان معدل تغير U بالنسبة للزمن t هو $\frac{\partial U}{\partial t}$ لأن r فيها ذو قيمة ثابتة .

يدعى معدل التغير هذا بالتغير الموضعي للتابع لارتباطه بوضع معين في الفراغ .

ثانيا) اذا ركزنا انتباهنا على جزيئة معينة من الوسط المتحرك بسرعة $\mathbf{v}$ (مثال ذلك جزيئة مائع يتحرك بسرعة $\mathbf{v}$) فان قيمة U المرتبطة بالجزيئة تتغير بالنسبة للزمن لسببين : أولهما أن قيمة U تتغير عندما تكون الجزيئة في الموضع P وثانيهما أن قيمة U تتغير لأن الجزيئة تنتقل الى موضع آخر Q .

لذا فان التغير بالنسبة للزمن لقيمة U الخاصة بهذه الجزيئة يدعى بالتغير الكلي للتابع U بالنسبة للزمن t أي $\frac{dU}{dt}$ وهو اشتقاق يتبع حركة الوسط .

يحسب المشتق الكلي للتابع $U(x, y, z, t)$ كما يلي :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

وبما أن :

$$\mathbf{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

فان :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v_x\frac{\partial U}{\partial x} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + v_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,U$$

أي أننا نحصل على المؤثر الاشتقاقي العودي :

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \qquad (3.1.1)$$

٣ ـ ١ ـ ٣ معادلة الاستمرار

ان كثافة المائع ρ تابعة للوضع والزمن معاً في المنطقة التي يشغلها المائع ، وان التعبير الرياضي لمبدأ حفظ المادة يؤدي الى معادلة الاستمرار .

لنركز انتباهنا على جزء من المائع يشغل منطقة فراغية $\mathcal{R}$ محاطة بسطح موجه مغلق Σ وهو سطح مثبت في المائع المتحرك ، (ان Σ هو سطح افتراضي وليس حاجزاً مادياً كتيماً) . إن معدل زيادة كتلة المائع التي يحويها هذا السطح بالنسبة للزمن هو :

$$(\text{i}) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{R}} \rho \, dV = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

والمشتق هنا موضعي لأن $\mathcal{R}$ محاطة بسطح مثبت .

ان معدل زيادة الكتلة يجب أن يساوي كتلة المائع التي تعبر السطح Σ في وحدة الزمن لتدخل المنطقة $\mathcal{R}$.

اذا كانت $\mathbf{v}$ هي سرعة المائع ، وبما أن الناظم $\hat{n}$ موجه الى خارج المنطقة ، فان كتلة المائع التي تدخل الى المنطقة $\mathcal{R}$ عبر عنصر المساحة dS في وحدة الزمن هي :

$$-(\rho \mathbf{v}) \cdot \hat{n} \, dS$$

ومنه فان معدل زيادة كتلة المائع بالنسبة للزمن ضمن هذا السطح هو :

$$(\text{ii}) \qquad -\oint_{\Sigma} (\rho \mathbf{v}) \cdot \hat{n} \, dS = -\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV$$

وذلك حسب نظرية غوص في التفرق . من (i) , (ii) ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV$$

وبما أن هذه العلاقة صحيحة لأجل أية منطقة يشغلها المائع فان :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

أي :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (3.1.2)$$

وهي معادلة الاستمرار ، ويمكن وضعها بأشكال أخرى منها :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$$

وذلك باستخدام قاعدة تفرق جـــداء أو بالشكل $\frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ وذلك باستخدام (3 . 1 . 1) .

حالة خاصة :

اذا كان المائع سائلاً ، فانه غير قابل للانضغـــاط (أي $d\rho / dt = 0$) ومعادلة الاستمرار في هذه الحالة هي :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

٣ - ١ - ٤ معادلة اويلر في تحريك مائع

لنأخذ المائع الذي يشغل منطقة $\mathcal{R}$ محاطة بسطح موجه مغلق Σ وهذا السطح

يتحرك مع تحرك المائع ، ويحوي دوماً الجزيئات نفسهـــا وبالتـــالي يحوي الكتلة نفسها أيضاً .

ليكن $d V$ عنصر الحجم في $\mathcal{R}$ فتكون كتلة العنصر $\rho\, d V$. لتكن $\mathbf{v}$ سرعـة جزيئة المائع و $\frac{d \mathbf{v}}{d t}$ تسارعها ولتكن $\mathbf{F}$ القوة الخارجية المطبقة على وحدة كتل المائع ، فتكون القوة الخارجية المؤثرة على عنصر الحجم هي $\mathbf{F}\, \rho\, d V$.

ليكن p ضغط المائع المحيط بالسطـح Σ فتكون القوة المؤثرة على عنصر المساحة $d S$ هي $- p\, \hat{n}\, d S$ وتكون معادلة تحريك المائع هي :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{d \mathbf{v}}{d t} \rho\, d V = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{F} \rho\, d V - \oint_{\Sigma} p\, \hat{n}\, d S$$

ومنه :

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{d \mathbf{v}}{d t} \rho\, d V = \int_{\mathcal{R}} (\rho \mathbf{F} - \nabla p)\, d V$$

وذلك باستخدام النظرية الثانية لتحويل تكامل سطحي الى حجمي .

بما أن العلاقة الاخيرة صحيحة لأجل أية منطقة يشغلها المائع فان :

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{d \mathbf{v}}{d t}$$

وباستخدام القانون (3 . 1 . 1) يكون :

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \qquad (3.1.3a)$$

ان هذه المعادلة هي التعبير الشعاعي لثلاث معادلات ديكارتية أوجدها اويلر في تحريك المائع .

باستخدام قاعدة اشتقاق تدرج الجداء الداخلي لشعاعين ينتج :

$$\nabla v^2 = \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

ومنه :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v})$$

وبتعويض هذه العلاقة في (3 . 1 . 3 a) ينتج شكل آخر لمعادلة أويلر وهو :

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) \qquad (3.1.3b)$$

٣ - ١ - ٥ معادلة التحريك الخاصة

اذا كانت القوة الخارجية F كمونية، وكمونها هو التابع العددي الموضع U - فان :

$$\mathbf{F} = - \nabla U \qquad (i)$$

واذا كان p تابعاً للكثافة ρ فقط فان :

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho} \qquad (ii)$$

بتعويض (i) , (ii) في (3 . 1 . 3 b) ينتج :

$$- \nabla \left(U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) \qquad (3.1.4)$$

وهذه معادلة تحريك مائع تحت تأثير قوة خارجية كمونية وضغطه تابع للكثافة فقط .

٣ – ١ – ٦ معادلة الطاقة

نبين فيما يلي كيفية مكاملة معادلة التحريك (3 . 1 . 4) للوصول الى معادلة الطاقة في حالتين خاصتين :

أولا) التحريك غير الاعصاري

يدعى $\nabla \wedge \mathbf{v}$ اعصار المائع ، وفي التحريك غير الاعصاري لهذا المائع يكون :

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = 0 \qquad (i)$$

في جميع نقاط المائع المتحرك في منطقة بسيطة الاتصال ومنه فان :

$$\mathbf{v} = - \nabla \Phi$$

حيث Φ هو تابع عددي للوضع والزمن ، ويدعى كمون السرعة .

ينتج من العلاقة الأخيرة أن :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (ii)$$

اذ يمكن ادخال $\frac{\partial}{\partial t}$ عبر ∇ لأن ∇ مؤثر اشتقاقي بالنسبة للوضع فقط .

بتعويض (i) , (ii) في المعادلة (3 . 1 . 4) ينتج :

$$\nabla \left(U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0$$

وبالمكاملة تنتج معادلة الطاقة في التحريك غير الاعصاري للمائع وهي :

$$U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{ثابت على خط الجريان أو الاعصار} \qquad (3.1.5)$$

حيث خط الجريان هو منحن مرسوم في المائع بحيث تكون السرعة v في كل نقطة من المائع مماسة له ، وخط الاعصار هو منحن مرسوم في المائع بحيث يكون شعاع توجيه مماسه في كل نقطة من المائع هو شعاع توجيه $v \wedge \nabla$.

ثانيا) **التحريك غير الاعصاري والمستقر :**

تكون حركة مائع مستقرة عندما تكون قيم جميع التوابع في كل نقطة من المائع ثابتة بالنسبة للزمن ، أي أن مشتقاتها الجزئية بالنسبة للمتحول t تنعدم ومنه $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ ، والمعادلة (3.1.5) تصبح :

$$U + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت في جميع أنحاء المائع} \qquad (3.1.6)$$

وتدعى (3.1.6) معادلة الطاقة في التحريك غير الاعصاري والمستقر للمائع وتأخذ أشكالا مختلفة منها :

– اذا كان المائع سائلاً متجانساً يتحرك تحت تأثير الجاذبية الارضية فان ρ ثابتة و $U = gz$ حيث z هو ارتفاع نقطة من السائل عن مستو أفقي معين و g ثابت الجاذبية الارضية ، والمعادلة (3.1.6) تصبح على الشكل :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{ثابت في جميع أنحاء السائل} \qquad (3.1.7)$$

وتدعى (3.1.7) معادلة برنولي .

– اذا كان المائع غازاً في تغير كظيم فان $p = k\rho^{\gamma}$ حيث k هو ثابت و γ هي نسبة الحرارتين النوعيتين للغاز تحت ضغط وحجم ثابت على الترتيب ، والمعادلة (3.1.6) تصبح :

$$U + \int \frac{k\gamma\rho^{\gamma-1}\,d\rho}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت في جميع أنحاء الغاز}$$

أي :

$$U + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{ثابت في جميع أنحاء الغاز} \qquad (3.1.8)$$

٣ – ٢ معادلة الايصال الحراري

٣ – ٢ – ١ قانون فورييه في الايصال الحراري

يقال عن جسم إنه تعادلي الخواص عندما تكون خواصه الفيزيائية في أية نقطة منه مستقلة عن التوجيه ،ونقتصر في دراستنا على جسم صلب ناقل للحرارة وتعادلي الخواص.

اذا كانت درجات الحرارة لنقاط جسم ساخن مختلفة ، فمن الواضح أن الحرارة ستنتقل من نقاط درجة حرارتها عالية الى نقاط درجة حرارتها أقل ، ويدعى هذا الانتقال بالايصال الحراري عبر الجسم .

ان درجة الحرارة $T > 0$ في هذا الجسم تابعة عددياً للموضع والزمن معاً . وفي لحظة معينة يمر بنقطة P من الجسم سطح تعادل حراري ويوجد لدرجة الحرارة في P تدرج ∇T ناظمي على سطح التعادل الحراري المار بالنقطة P .

ان الدراسة الرياضية للايصال الحراري عبر الجسم تعتمد على قانون فوريبه الذي ينص أنه في لحظة زمنية معينة يكون :

$$(3.2.1) \qquad \mathbf{F} = -k \nabla T \quad , \quad (k > 0)$$

حيث $\mathbf{F}$ هو تدفق الحرارة في النقطة P وهو شعاع منحاه عمودي على سطح التعادل الحراري المار بالنقطه P وطويلته هي كمية الحرارة التي تعبر وحدة مساحة هذا السطح التعادلي في وحدة الزمن . يدعى k عامل الايصال الحراري عبر الجسم في P ويمكن أن يكون ثابتاً (اذا كان الجسم متجانساً) أو تابعاً عددياً للموضع (اذا كان الجسم غير متجانس) . ان اشارة الناقص في القانون (3.2.1) تشير الى انتقال الحرارة من نقاط درجة حرارتها عالية الى نقاط درجة حرارتها أقل .

٣ – ٢ – ٢ المعادلة التفاضلية للايصال الحراري

لتكن ρ كثافة الجسم في P ولتكن c حرارته النوعيـــة . اذا كان d V عنصر الحجم في P فان زيادة درجة الحرارة في P بمقدار d T تقابل امتصاص العنصر لكمية من الحرارة قدرها $c \rho \, dV \, dT$.

ليكن Σ سطحاً موجهاً مغلقاً يحيط بمنطقة $\mathcal{R}$ واقعة بكليتها في الجسم .

اذا كان $-\frac{\partial T}{\partial t}$ هو انخفاض درجة الحرارة في P في وحدة الزمن فان كمية حرارة المادة الواقعة في المنطقة $\mathcal{R}$ تنقص في وحدة الزمن بمقدار :

$$(i) \qquad -\int_{\mathcal{R}} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV$$

ومن جهة أخرى فان كمية الحرارة الخارجة من المنطقة عبر وحدة مساحة السطح Σ في وحدة الزمن هي :

$$\hat{n} . F = - \hat{n} . (k \nabla T)$$

وذلك باستخدام القانون (3 . 2 . 1) ومنه فان كمية الحرارة التي تخرج عبر السطح Σ في وحدة الزمن هي :

$$(ii) \qquad - \oint_{\Sigma} \hat{n} . (k \nabla T) \, dS = - \int_{\mathcal{R}} \nabla . (k \nabla T) \, dV$$

وذلك باستخدام نظرية غوص في التفرق . من تساوي (i) , (ii) ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}} c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV = \int_{\mathcal{R}} \nabla . (k \nabla T) \, dV$$

وبما أن هذه العلاقة صحيحة لأجل أية منطقة من الجسم فان :

$$(3 . 2 . 2) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c \rho} \nabla . (k \nabla T)$$

وهي المعادلة التفاضلية للايصال الحراري ، التي يجب أن تحققها درجة الحرارة T التابعة للموضع والزمن معاً ، حيث أن k ، ρ ، c توابع عددية للموضع .

حالات خاصة :

أولاً) اذا كان الجسم متجانساً فان c ، ρ ، k ثابتة والمعادلة (3 . 2 . 2) تصبح :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \nabla^2 T \qquad (3.2.3)$$

والثابت $\frac{k}{c\rho}$ هو الانتشار الحراري .

ثانياً) في الايصال الحراري المستقر عبر جسم متجانس ، فان درجة الحرارة لا تتغير بتغير الزمن والمعادلة (3.2.3) تصبح على الشكل :

$$\nabla^2 T = 0$$

أي أن درجة الحرارة تحقق عندئذ معادلة لابلاس .

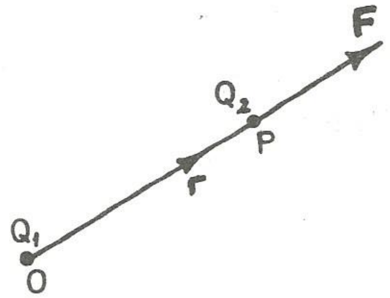
٣ - ٣ الكهرباء والمغناطيسية الساكنة

ان الوحدات المستعملة هنا هي الوحدات الدولية .

٣ - ٣ - ١ الحقل والكمون الكهربائي

الشحن النقطية في الخلاء :

ان القوة F التي تؤثر بها شحنة نقطية Q_1 موضوعة في النقطة O على شحنة نقطية أخرى Q_2 موضوعة في النقطة P التي تبعد عن O بمقدار r (الشكل ١) تعطى من قانون كولومب التالي :

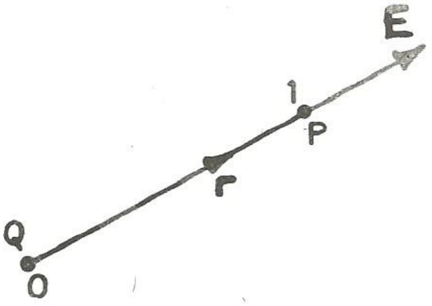


الشكل (١)

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi k_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

حيث $\hat{r}$ هو شعاع توجيه $\overrightarrow{OP}$ و k_0 هو ثابت السماحية الكهربائية في الخلاء .

ان الحقــل الكهربائي **E** في P لشحنة نقطية Q موضوعة في O هو بالتعريف القوة التي تؤثر بها Q على وحدة الشحن الموجبة الموضوعة في P (الشكل ٢) ومن قانون كولومب ينتج أن :



الشكل (٢)

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi k_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \qquad (A)$$

ولكن :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi k_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = -\nabla \frac{Q/4\pi k_0}{r}$$

فيكون :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \qquad (3.3.1)$$

حيث :

$$\Phi = \frac{Q/4\pi k_0}{r} \qquad (B)$$

ويدعى Φ بالكمون الكهربائي للشحنة Q في النقطة P .

بما أن $\frac{1}{r}$ (حيث $r \neq 0$) هو تابع توافقي فان Φ تحقق معادلة لابلاس الا في النقطة التي توجد فيها الشحنة أي أن :

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

باستخدام (3 . 3 . 1) والعلاقة الأخيرة ينتج أن :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \nabla \cdot (\nabla \Phi) = - (\nabla \cdot \nabla) \Phi = - \nabla^2 \Phi = 0$$

ومنه فان :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad (3.3.2)$$

الا في النقطة التي تشغلها الشحنة Q .

وبأخذ سطح موجه مغلق Σ محيط بالشحنة Q يكون تدفق **E** عبر Σ هو :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4 \pi k_0} \oint_{\Sigma} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} \, dS$$

وذلك باستخدام العلاقة (A) . ولكن $\oint_{\Sigma} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} \, dS$ هو تكامل غوص وهو مساو للزاوية المجسمة التي يرى بها السطح Σ من نقطـــة داخله أي يساوي 4π وينتج من ذلك أن :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{k_0} \qquad (C)$$

وتدعى العلاقة (C) نظرية غوص في التدفق .

في حال وجود عدة شحنات نقطية :

$$Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

فان الحقل الكهربائي لهذه الشحنات في النقطة P التي تبعد عن الشحنة Q_i بمقدار r_i هي المحصلة الشعاعية للحقول الافرادية أي أن :

$$(A') \qquad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i \quad , \quad \left(\mathbf{E}_i = \frac{Q_i}{4\pi k_0} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2} \right)$$

وان الكمون Φ في النقطة P لهذه الشحنات هو مجموع الكمونات الافرادية أي أن :

$$(B') \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \quad , \quad \left(\Phi_i = \frac{Q_i / 4\pi k_0}{r_i} \right)$$

كما أن تدفق الحقل **E** عبر السطح الموجه المغلق Σ المحيط بالشحنات هو :

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i$$

وإن العلاقتين (3 . 3 . 1) , (3 . 3 . 2) تبقيان صحيحتين في حال وجود عدة شحنات إذ أن $\mathbf{E}_i = -\nabla \Phi_i$ فيكون :

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}_i = -\sum_{i=1}^{N} (\nabla \Phi_i) = -\nabla \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = -\nabla \Phi$$

وذلك باستخدام (A') , (B') أي أن العلاقة (3 . 3 . 1) صحيحة في هذه الحالة وبالطريقة نفسها نبرهن على صحة العلاقة (3 . 3 . 2) .

المنطقة متصلة الشحن :

اذا كان الحقل الكهربائي ناتجاً عن منطقة فراغيـة $\mathcal{R}$ متصلة الشحن (أي أن الشحنات موزعة في حجمها بشكل متصل ، لا بشكل شحنات نقطية متفرقة) واذا

كانت ρ هي الكثافة الحجمية للشحنة (حيث ρ هو تابع عـــددي للموضع في الحالة العامة) فان الشحنة الكلية Q هي :

$$Q = \int_{\mathcal{R}} \rho \, dV$$

وان الكمون الكهربائي في النقطة P التي تبعد عن عنصر الحجم بالمقدار r هو :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi k} \int_{\mathcal{R}} \frac{\rho \, dV}{r}$$

سواء أكانت P خارج أم داخل المنطقة المشحونة $\mathcal{R}$. ان الحقل الكهربائي E في نقطة P يرتبط بالكمون في هذه النقطة بالعلاقة :

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

سواء أكانت النقطة P داخل أم خارج $\mathcal{R}$. إن k هو ثابت السماحية الكهربائية في الوسط المشحون.

خارج المنطقة $\mathcal{R}$ يكون :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

ولكن هذه العلاقة غير صحيحة داخل المنطقة المشحونة ، لأنه بتطبيق نظريـة غوص في التدفق على منطقة $\mathcal{R}_1$ محتواة في $\mathcal{R}$ ومحاطة بسطح موجه مغلق Σ_1 يكون :

$$\text{(i)} \qquad \oint_{\Sigma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{k} \int_{\mathcal{R}_1} \rho \, dV$$

ومن نظرية غوص في التفرق لدينا :

$$\text{(ii)} \qquad \oint_{\Sigma_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{R}_1} \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV$$

من (i) , (ii) ينتج :

$$\int_{\mathcal{R}_1} \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{k} \int_{\mathcal{R}_1} \rho\, dV$$

وبما أن هذه العلاقة صحيحة لأجل أية منطقة $\mathcal{R}_1$ محتواة في $\mathcal{R}$ فان :

$$\text{(iii)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{k}$$

وباستخدام $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ والعلاقة (iii) ينتج :

$$\nabla . \mathbf{E} = -\nabla . (\nabla \Phi) = -\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{k}$$

أي أن :

$$(3 \cdot 3 \cdot 2') \qquad \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{k} \Leftrightarrow \nabla . \mathbf{E} = \frac{\rho}{k}$$

وتدعى العلاقة $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{k}$ معادلة بواسون وهي المعادلة التي يحققهاالكمون في أية نقطة من المنطقة المشحونة .

الخلاصة يرتبط الحقل الكهربائي $\mathbf{E}$ والكمون الكهربائي Φ بالعلاقـة $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ علماً أنه :

أولا) اذا كان الحقل ناتجاً عن شحنة نقطية منفردة أو شحنات نقطيـــة عديدة

متفرقة فان الكمون الكهربائي يحقق معادلة لابلاس إلا في النقاط التي تشغلها الشحنات أما تفرق الحقل فينعدم إلا في النقاط المذكورة .

ثانيا) اذا كان الحقل ناتجاً عن منطقة متعادلة الخواص متصلة الشحن فان الكمون الكهربائي في خارجها يحقق معادلة لابلاس ، وفي داخلها يحقق معادلة بواسون ، أما تفرق الحقل فينعدم في خارجها ولا ينعدم في داخلها .

٣ ـ ٣ ـ ٢ الحقل والكمون المغناطيسي

بالطريقة نفسها المتبعة في الحقل والكمون الكهربائي ، ينتج من قانون كولومب أن القوة التي يؤثر بها قطب مغناطيسي M_1 على قطب مغناطيسي آخر M_2 يبعد عنه بمقدار r هي :

$$\mathbf{F} = \frac{M_1 M_2}{4 \pi \mu_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

حيث μ_0 هو ثابت النفوذية المغناطيسية في الخلاء .

ان الحقل المغناطيسي $\mathbf{H}$ يرتبط بالكمون المغناطيسي U بالعلاقة :

$$\mathbf{H} = - \nabla U \qquad (3 \cdot 3 \cdot 3)$$

واذا كان الحقل ناتجاً عن قطب منفرد أو أقطاب مغناطيسية متفرقة فان العلاقة التالية صحيحة إلا في النقاط التي تشغلها الاقطاب :

$$\nabla^2 U = 0 \Leftrightarrow \nabla . \mathbf{H} = 0 \qquad (3 . 3 . 4)$$

أما اذا كان الحقل ناتجاً عن منطقة متعادلة الخواص متصلة المغنطة ، واذا كانت ρ الكثافة الحجمية للاقطاب المغناطيسية فيها فان العلاقة (3 . 3 . 4) تبقى صحيحة في خارج المنطقة المغنطة ، أما في داخل المنطقة فيكون :

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\mu} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho}{\mu} \qquad (3.3.4')$$

حيث μ هو ثابت النفوذية في المنطقة المعتبرة .

٣ – ٤ معادلات مكسويل ونتائجها

ليكن **E** الحقل الكهربائي و **H** الحقل المغناطيسي في وسط ناقل ساكن متجانس تعادلي الخواص ومتصل الشحن . لتكن ρ الكثافة الحجمية للشحنة وليكن t الزمن .

ان السماحية الكهربائية k والنفوذية المغناطيسية μ والناقلية الكهربائية σ لهذا الوسط هي ثوابت موجبة ، ويكون $\mathbf{D} = k\,\mathbf{E}$ التحريض الكهربائي و $\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}$ التحريض المغناطيسي و $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$ كثافة التيار في هذا الوسط .

وباستخدام الوحدات الدولية تكون معادلات ماكسويل للحقل الكهرطيسي المعين بتوابع الموضع والزمن معاً ρ , **H** , **E** هي المعادلات الاربع التالية :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{k} \qquad (3.4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad (3.4.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \sigma\,\mathbf{E} + k\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (3.4.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\mu\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad (3.4.4)$$

ان معادلات مكسويل تتحكم في التحريك بالحقل الكهرطيسي ، ويمكن أن نستنتج منها خواص عديدة أهمها :

أولا) **تناقص الشحنة :**

من (3 . 4 . 3) ينتج :

$$\nabla . (\nabla \wedge H) = \sigma (\nabla . E) + k \frac{\partial}{\partial t} (\nabla . E) \qquad (i)$$

وذلك لأن ∇ لا يتعلق بالزمن .

ولكن $\nabla . (\nabla \wedge H) = 0$ كما رأينا في الفقرة (١ — ٥) وبتعويض هذه القيمة والعلاقة (3 . 4 . 1) في (i) ينتج :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{k} \rho = 0$$

ان هذه العلاقة في نقطة معينة داخل الوسط الناقل تمثل معادلة تفاضلية عادية في التابع ρ والمتحول t وحلها العام هو :

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{\sigma}{k} t}$$

حيث ρ_0 هو ثابت . عندما $t \to \infty$ فان $\rho \to 0$ أي أن الشحنة في أية نقطة واقعة داخل الوسط الناقل تتناقص الى الصفر مع مرور الزمن بشكل مستقل عن أية تغيرات كهرطيسية تطرأ في الوقت نفسه ، ولذا فاننا نستطيع وضع $\rho = 0$ في معظم الاحيان داخل الوسط الناقل .

ان $\rho \neq 0$ على سطح الوسط الناقل ، لان الشحنة تنتقل من داخل الوسط الى سطحه .

ثانيا) **معادلتا البرق والانتشار الكهربائي :**

بوضع $\rho = 0$ في المعادلة (3 . 4 . 1) (وقد رأينا أن هذا ممكن داخل الوسط الناقل) ينتج :

$$(i) \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

من (3 . 4 . 4) ينتج بأخذ دوران الطرفين أن :

$$(ii) \qquad \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \mathbf{H})$$

وذلك لأن ∇ لا تتعلق بالزمن . من الفقرة (١ — ٥) ينتج :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \nabla (\nabla . \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

وباستخدام (i) يكون :

$$(iii) \qquad \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = 0 - \nabla^2 \mathbf{E}$$

بتعويض (3 . 4 . 3) و (iii) في (ii) تنتج المعادلة التفاضلية التي يحققها الحقل الكهربائي وهي :

$$(3.4.5) \qquad \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu k \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

وتدعى (3 . 4 . 5) معادلة البرق . بالطريقة نفسها نبرهن أن H يحقق المعادلة نفسها .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها تغير الحقل الكهرطيسي بطيئاً بالنسبة للزمن فانه يمكن اهمال الحد الحاوي على $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ في المعادلة (3 . 4 . 5) وبوضع $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ في الناتج تكون المعادلة التفاضلية التي تحققها كثافة التيار هي :

$$(3.4.6) \qquad \nabla^2 \mathbf{J} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}$$

تدعى (3 . 4 . 6) معادلة الانتشار الكهربائي ، وهي تشبه معادلة الايصال الحراري عبر جسم متجانس ، وقد حلت كثافة التيار **J** محل درجة الحرارة T .

ثالثا) الموجة الكهربائية والموجة المغناطيسية :

اذا كان لدينا وسط غير ناقل فان $\sigma = 0$ وينتج من (3 . 4 . 5) أن :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\, k \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial\, t^2} \qquad (3 . 4 . 7)$$

وتنتج المعادلة نفسها بالنسبة للحقل المغناطيسي **H** .

ان المعادلة (3 . 4 . 7) هي المعادلة الموجية العامة ، وتدل أن **E** , **H** هي موجات تنتقل في الوسط بسرعة قدرها $\frac{1}{\sqrt{\mu\, k}}$.

في الخلاء يكون $\mu = \mu_0$, $k = k_0$, $\mu_0 k_0 c^2 = 1$ حيث c هو سرعة النور في الخلاء ، وتنتقل عندئذ الموجات الكهربائية والمغناطيسية بسرعة c وهذه أهم نتيجة نستخلصها من معادلات مكسويل .

الباب الثاني

التحليل العقدي

١ ـ العدد العقدي والمتحول العقدي

١ – ١ الاشكال المختلفة للعدد العقدي

أولا) الشكل الجبري :

ان المنصر التخيلي i يعرف بالعلاقة $i^2 = -1$ واذا كان x , y عددين حقيقيين فان العدد العقدي z بشكله الجبري (أو الديكارتي) هو :

$$z = x + i\,y$$

ويتكون من جزء حقيقي $x = Re(z)$ ومن جزء تخيلي $y = Im(z)$.

ان الطويلة $|z|$ لهذا العدد العقدي (أو مطلقه) هي :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)} \geqslant 0$$

اذا كانت الطويلة غير منعدمة فان السمة (أو الطور) $arg(z)$ لهذا العدد العقدي هي :

$$arg(z) = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

يجب أن نلاحظ أن السمة غير معينة عند انعدام الطويلة ، كما أنها متعددة القيم وتعرف القيمة الاساسية للسمة بأنها :

$$0 \leqslant arg(z) < 2\pi$$

وتعتبر السمة موجبة اذا قيست في اتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة ، ومالم يذكر خلاف ذلك فيقصد بسمة العدد العقدي القيمة الاساسية فقط ، ويمكن أن

تقاس السعة في هذه الحالة بالدرجات أو بالراديان ، ونقتصر على قياسها بالراديان .

ان المرافق $\overline{z}$ للعدد العقدي z ينتج بتغيير اشارة المنصر التخيلي أي أن :

$$\overline{z} = x - i y$$

وينتج من هذا التعريف أن :

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = x = Re(z) \quad , \quad \frac{z - \overline{z}}{2i} = y = Im(z)$$

$$z\,\overline{z} = |z|^2 \geqslant 0$$

خواص ونتائج :

— من تعريف المنصر التخيلي ينتج أن :

$$i^1 = i \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad i^4 = 1$$

ويتكرر الامر على هذا المنوال كل أربع قوى متتالية .

— يتساوى عددان عقديان اذا وفقط اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان على حدة وجزءاهما التخيليان على حدة فمثلا :

$$x + i y = 5 - i 3 \Rightarrow x = 5 \quad , \quad y = -3$$

ومن ذلك فان العدد العقدي ينعدم اذا وفقط اذا انعدم كل من جزءيه الحقيقي والتخيلي .

— تخضع الاعداد العقدية بشكلها الجبري لقواعد الجبر الحقيقي شرط أن نعوض عن i^2 بالعدد -1 ومنه فان جمع عددين عقديين $c + i d$ ، $a + i b$ يتم حسب القاعدة :

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

وضربهما يتم حسب القاعدة :

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

وتحول قسمة العددين الى عمليـــة ضرب ، وذلك بضرب الصورة والمخرج بمرافق المخرج حسب القاعدة :

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=$$

$$\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

علماً أن حاصل قسمة عدد عقدي على الصفر غير معرف . تعمم القواعد السابقة في حال وجود ثلاثة أعداد عقدية أو أكثر .

– ان العدد الحقيقي هو عدد عقدي جزؤه التخيلي منعـــدم ، وبالتالي فان حقل الاعداد الحقيقية R هو حقل جزئي من حقل الاعداد العقدية C .

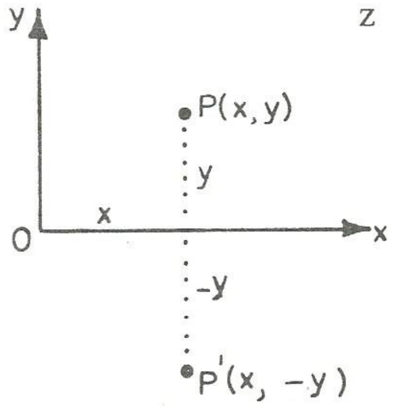
أما العدد التخيلي فهو عدد عقدي جزؤه الحقيقي منعـــدم ، وبالتالي فان حقل الاعداد التخيلية هو أيضاً حقل جزئي من C .

– كفراغ شعاعي معرف على حقل الاعداد الحقيقية R فانه يمكن اعتبـــار حقل الاعداد العقدية C بأنه الفراغ الاقليدي ثنائي الابعـــاد E^2 (أي المستوي) .

تمثيل العدد العقدي :

يمكن تمثيل العدد العقدي $z = x + i y$ باحدي الطريقتين التاليتين :

– التمثيل الهندسي : يمثل العدد z بنقطة وحيدة $P(x, y)$ (الشكل ١) منسوبة الى محور O x يدعى المحور الحقيقي (وتمثل عليه الاعداد الحقيقية) ومحور عمودي عليه O y يدعى المحور التخيلي (وتمثل عليه الاعداد التخيلية) ويدعى المستوي المعين بهذين المحورين بالمستوي العقدي ، ونرمز له بالرمز Z .

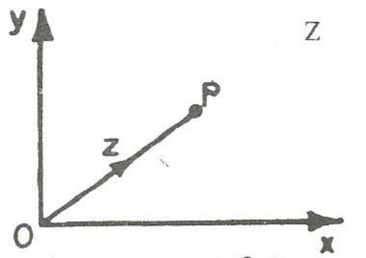


الشكل (١)

وبالعكس فان كل نقطة (x, y) من المستوي العقدي Z تمثل عدداً عقدياً وحيداً $z = x + i y$ عندما نقتصر على القيمة الاساسية للسمة . ينتج من ذلك أن المرافق $\overline{z}$ يمثل بالنقطة $P'(x, -y)$ وهي نظيرة P بالنسبة للمحور O x (الشكل ١) .

– التمثيل الشعاعي :

من الشكل (٢) نرى أنه يمكن اعتبار العدد z شعاعاً مبدؤه O ونهايته النقطة $P(x, y)$ من المستوي Z . وبالعكس فان كل

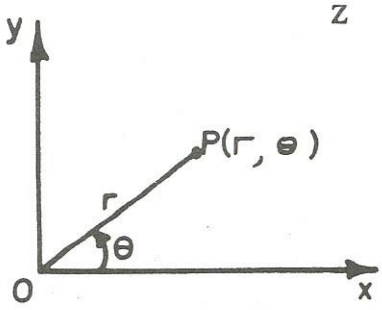


الشكل (٢)

شعاع $\overrightarrow{OP}$ من المستوي العقدي Z يمثل عدداً عقدياً وحيداً عندمـــا نقتصر على القيمة الاساسية للسعة .

ينتج من ذلك أنه يمكن جمع وطرح عددين عقديين كما تجمع وتطرح الاشعة .

ثانيا) **الشكل المثلثي :**



الشكل (٣)

بتبديل الاحداثيين الديكارتيين المعلومين (x , y) في $z = x + i y$ بالاحـــداثيين القطبيين المقابلين (r , θ) (الشكل ٣) ينتج أن :

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \text{ cis } \theta$$

ويدعى هذا الشكل بالشكل المثلثي (أو القطبي) للعدد العقدي z علماً أن طويلته هي :

$$| z | = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

حيث $0 \leqslant r$ وأن سعته :

$$\arg (z) = \theta = tg^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \qquad , \qquad (r > 0)$$

قد أخذت بالقيمة الاساسية أي أن :

$$0 \leqslant \theta < 2 \pi$$

ويمكن أن تقاس θ في هذه الحالة بالدرجات أو بالراديان ونقتصر على قياسـها بالراديان .

اذا أخذت جميع قيم السمة فان :

$$z = r \operatorname{cis} (\theta + 2 k \pi)$$

حيث k هو عدد صحيح $\quad r > 0 \quad , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$

وبوضع $k = 0$ نعود الى الحالة السابقة التي اقتصرنا فيها على القيمة الاساسية للسمة ، وما لم يذكر خلاف ذلك فنقتصر على القيمة الاساسية للسمة .

ان مرافق العدد : $\quad z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

هو العدد : $\quad \overline{z} = r (\cos \theta - i \sin \theta)$

ومنه فان : $\quad z \overline{z} = r^2 \geqslant 0$

ملاحظة :

ان $\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ يعطي زاويتين محصورتين بين الصفر و 2π ، ولذا قبل تبديل الاحداثيات الديكارتية بالقطبية يجب تعيين الربع الذي تقع فيه النقطة $z = x + i y$ لتعيين قيمة θ المقابلة ، فمثـــلا اذا كان $z = 1 + i$ فان $\theta = \operatorname{tg}^{-1} (1) = \pi/4$ لان النقطة تقع في الربع الاول ، أما اذا كان $z = - 1 - i$ فان $\theta = \operatorname{tg}^{-1} (1) = 5 \pi/4$ لأن النقطة تقع في الربع الثالث .

ثالثاً) الشكل الاسي :

ان علاقة اويلر هي : $\quad e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

حيث θ تقاس بالراديان فقط ، وينتج من ذلك أن العدد العقدي بشكله المثلثي $z = r \operatorname{cis} \theta$ يمكن أن يكتب بالشكل الأسي :

$$z = r\, e^{i\theta}$$

وطويلته هي :

$$|z| = r$$

حيث θ [illegible] أما سمته فقد أخذت بالقيمة الاساسية :

$$0 \leqslant \theta < 2\pi \qquad , \qquad (r > 0)$$

اذا أخذت جميع قيم السعة فان :

$$z = r\, e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad , \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi \;,\; r > 0 \;,\; k \text{ عدد صحيح})$$

وبوضع $k = 0$ نعود الى الحالة السابقة ، وما لم يذكر خلاف ذلك فنقتصر على القيمة الأساسية للسعة .

ان مرافق العدد $z = r\, e^{i\theta}$ هو العدد $\bar{z} = r\, e^{-i\theta}$.

نتائج :

ان الشكل الأسي هو أكثر الاشكال الثلاثة ملاءمة لتنفيذ بعض العمليات الجبرية والهندسية ولتعريف تراكيب ترتبط بالعدد العقدي z ومنها :

– الضرب والقسمة : اذا كان لدينا العددان العقديان $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$ ، $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ فان جداءهما هو :

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

أي هو عدد عقدي طويلته جداء الطويلتين وسعته مجموع السعتين . وبالمثل فان حاصل قسمتهما هو :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

– التدوير في المستوي العقدي : اذا كان لدينا العدد العقدي $\beta = e^{i\,b}$ فان :

$$\beta\, z = r\, e^{i\,(\theta + b)}$$

أي أن الشعاع الممثل للعدد z يدور بزاوية مقدارها b فمثلا لدى ضرب z بالعدد 1 — فان الشعاع الممثل للعدد العقدي في المستوي Z يدور بزاوية قدرها π وذلك لأن $-1 = e^{i\pi}$ ولدى ضربه بالعدد i — فان الشعاع يدور بزاوية قدرها $3\pi/2$ وذلك لأن $-i = e^{\frac{i\,3\pi}{2}}$ وقد اقتصرنا هنا على القيمة الأساسية للسعة في كل حالة .

– لغاريتم العدد السالب والعدد العقدي : اذا كان k عدداً صحيحاً فان لغاريتم العدد السالب a – (حيث $a > 0$) هو :

$$\ln[-a] = \ln[a\, e^{i(\pi + 2k\pi)}] = \ln a + i\,(\pi + 2k\pi)$$

أي أنه عدد عقدي متعدد القيم ، وتعرف قيمته الاساسية بأنها القيمة الناتجة من وضع $k = 0$ ونقتصر على القيمة الاساسية ما لم يذكر خلاف ذلك .

ان لغاريتم العدد العقدي z هو :

$$\ln z = \ln r\, e^{i\,(\theta + 2k\pi)} = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)$$

أي أنه عدد عقدي متعدد القيم ، وتعرف قيمته الاساسية بأنها القيمة الناتجة من وضع $k = 0$ ونقتصر عليها ما لم يذكر خلاف ذلك .

– رفع عدد عقدي الى قوة حقيقية : اذا كان k عدداً صحيحاً وكان M عدداً صحيحاً فينتج من نظرية دو موافر أن :

$$z^M = [r e^{i(\theta + 2k\pi)}]^M = r^M e^{i(M\theta + M2k\pi)}$$

$$= r^M e^{iM\theta}$$

أي أن ناتج رفع z الى القوة الصحيحة M هو عدد عقدي وحيد القيمة .

ولكن لدى رفع z الى القوة الحقيقية العادية M/N (حيث M هو عدد صحيح و N هو عدد صحيح موجب ولا يوجد بينهما عامل مشترك) فان :

$$z^{\frac{M}{N}} = \left[r e^{i(\theta + 2k\pi)}\right]^{\frac{M}{N}} = r^{\frac{M}{N}} e^{i\left(\frac{M}{N}\theta + \frac{M}{N}2k\pi\right)}$$

أي أن الناتج هو عدد عقدي متعدد القيم ونحصل عليها باعطاء k القيم $N - 1$, ... , 2 , 1 , 0 للحصول على N قيمة مختلفة للمقدار $z^{M/N}$ وفي الحالة الخاصة $M = 1$ نحصل على الجذور النونية للعدد z .

تعرف القيمة الاساسية بأنها القيمة الناتجة من وضع $k = 0$ ونقتصر عليها ما لم يذكر خلاف ذلك .

- رفع عدد عقدي الى قوة عقدية : اذا كان $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ عدداً عقدياً فان رفع z الى القوة α هو بالتعريف

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

بتعويض $z = r e^{i(\theta + 2k\pi)}$ فيها ينتج :

$$z^\alpha = e^{[(\alpha_1 + i\alpha_2)(\ln r + i(\theta + 2k\pi))]}$$

$$= e^{[\alpha_1 \ln r - \alpha_2 (\theta + 2k\pi)] + i[\alpha_2 \ln r + \alpha_1 (\theta + 2k\pi)]}$$

أي أن z^{α} هو عدد عقدي متعدد القيم ، وتعرف قيمته الاساسية بأنها القيمة الناتجة من وضع $k = 0$ ونقتصر عليها ما لم يذكر خلاف ذلك .

الخلاصة ان العلاقة بين الاشكال الثلاثة للعدد العقدي z هي :

$$z = x + iy = r \operatorname{cis} \theta = r e^{i\theta}$$

حيث الطويلة هي : $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$

والسعة (عندما $r > 0$) هي :

$$\arg(z) = \theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

وما لم يذكر خلاف ذلك ، فتؤخذ السعة بالقيمة الاساسية $0 \leqslant \theta < 2\pi$ وتقاس السعة دوماً بالراديان .

١ ـ ٢ خواص طويلات الاعداد العقدية

من التعاريف التي أوردناها ، ومن تمثيل العدد العقدي في المستوي Z تنتج علاقات ومتراجحات عديدة تربط بين طويلات الاعداد العقدية والهندسة المستوية وأهمها :

أولا) بما أن : $|z| = \sqrt{Re^2(z) + Im^2(z)}$

فان : $|z| \geqslant Re(z) \quad , \quad |z| \geqslant Im(z)$

ثانيا) من تعريف العدد العقدي ومرافقه ينتج :

$$|z| = |\bar{z}| \quad , \quad z\bar{z} = |z|^2$$

ثالثاً) من ضرب العددين العقديين $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ينتج :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

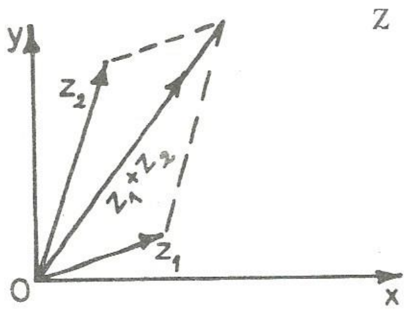
وهذه النتيجة يمكن تعميمها للحصول على :

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_N| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_N|$$

رابعاً) من تمثيل العددين العقديين z_2 , z_1 ومجموعهما بأشعة (الشكل ٤) ، ومن المتراجحات التي تحققها أضلاع مثلث ينتج :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

وهذه النتيجة يمكن تعميمها للحصول على :



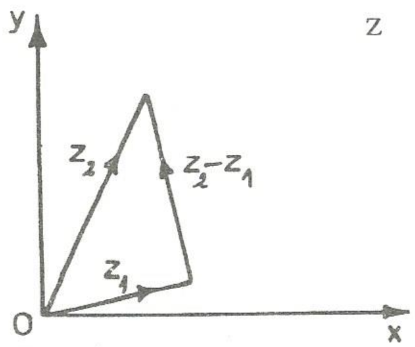
الشكل (٤)

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_N| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_N|$$

خامساً) من تمثيل العددين العقديين z_2 , z_1 وفرقهما بأشعة (الشكل ٥) ومن خواص المثلث ينتج :

$$|z_2 - z_1| \geqslant |z_2| - |z_1| \geqslant 0$$

حيث $|z_2 - z_1|$ هو البعد بين النقطتين z_2 , z_1 .



الشكل (٥)

١ - ٣ المتحول العقدي

اذا كان z عنصراً ما من مجموعة أعداد عقدية فنقول إن z متحول عقدي ويكون :

$$z = x + i y = r e^{i \theta}$$

حيث x , y أو r , θ هما متحولان حقيقيان مستقلان وتعرف طويلة وسعة المتحول العقدي كما عرفت في العدد العقدي .

بما أن z يمثل هندسياً بنقطة في المستوي العقدي Z فان تعاريف وخواص المجموعات النقطية في Z هي التعاريف والخواص نفسها التي درسناها في المستوي الحقيقي ، ونخص بالذكر الجوار Ω والنطاق $\mathcal{D}$ بأنواعه والمنطقة $\mathcal{R}$ بأنواعها .

ان مجموعة النقاط z المحققة لمساواة مفروضة تمثل بمنحن في المستوي العقدي Z أما المجموعة المحققة لمتراجحة مفروضة فتمثل بنطاق في هذا المستوي ، واذا شمل التراجح حالة المساواة فتمثل بمنطقة . فمثلا $|z| = 1$ تمثل في Z بدائرة مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها الواحد أما $|z| < 1$ فتمثل بالنطاق الدائري المؤلف من النقاط الواقعة داخل الدائرة السابقة ، بينما $|z| \leqslant 1$ تمثل بالمنطقة الدائرية المحاطة بالدائرة المذكورة .

أمثلـــــــة (١)

مثال ١-١-١ بسط التركيب العقدى $z = 2 - i2 + \frac{2}{1+i}$

واضعا الجواب بالشكل الجبرى والمثلثي والاسي .

الحـــل :
$$z = 2 - i2 + \frac{2}{1+i} = 2 - i2 + \frac{2}{1+1}(1-i) = 3 - i3$$

وهو الشكل الجبرى .

ان طويلته هي : $|z| = r = \sqrt{9+9} = 4.243$

وسعته بالراديان هي : $\arg(z) = \theta = tg^{-1}(-1) = 5.498$

وذلك لان النقطة تقع في الربع الرابع من المستوى العقدى .

ان الشكل المثلثي للعدد المفروض هو $z = 4.243 \ Cis \ 5.498$

وشكله الاسي هو : $z = 4.243 \ e^{i\,5.498}$

مثال ١-١-٢ احسب الجذور التكعيبية للعدد $z = 1 + i3$.

الحـــل :

بالتحويل الى الشكل الاسي واخذ جميع قيم السعة يكون :

$$z = 3.162 \ e^{i(1.249 + 2k\pi)} \quad , \quad (k \text{ عدد صحيح })$$

من نظرية دو موافر ينتج :

$$z^{1/3} = (3.162)^{1/3} \ e^{i\left(\frac{1.249}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = 1.468 \ e^{i\left(0.416 + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

بوضع $k = 0,1,2$ على الترتيب تنتج الجذور التكعيبية الثلاثة :

$$1.468\, e^{i\,0.416} \quad , \quad 1.468\, e^{i\,2.510} \quad , \quad 1.468\, e^{i\,4.605}$$

مثال ١-١-٣ اوجد قيمة $\ln(2+i)$.

الحل :

بتحويل العدد العقدي $Z = 2+i$ الى الشكل الاسي ينتج :

$$Z = 2.236\, e^{i\,0.464}$$

$$\ln Z = \ln 2.236 + i\,0.464$$

$$= 0.805 + i\,0.464$$

مثال ١-١-٤ احسب قيمة $(1+i)^{1-i}$.

الحل :

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\ln(1+i)}$$

$$= e^{(1-i)\ln(1.414\, e^{i\,0.785})}$$

$$= e^{(1-i)(0.346 + i\,0.785)}$$

$$= e^{1.131 + i\,0.439}$$

$$= e^{1.131} \cdot e^{i\,0.439}$$

$$= 3.099(\cos 0.439 + i \sin 0.439) = 2.805 + i\,1.317$$

مثال ١-٣-١ عيّن في المستوى العقدى المجموعات النقطية التالية :

آ) $z = \bar{z}$ ب) $|z-(1-i2)| = 5$

جـ) $I_m(z) > Re(z) > 0$ د) $|z-1| \geqslant Re(z) \geqslant 0$

<u>الحل :</u>

آ) بتعويض $\bar{z}$ و z بشكلهما الجبرى ينتج :

$$x + iy = x - iy$$

ومنه : $y = 0$

وهي معادلة المحور الحقيقي .

ب) ان النقطة z تتحول بحيث يبقى بعدها عن النقطة الثابتة $z_0 = 1 - i2$ مساويا لمقدار ثابت 5 ولذا فان z تقع على محيط دائرة مركزها النقطة z_0 ونصف قطرها 5 .

وبدلا من هذه الطريقة الهندسية يمكن حل المثال تحليليا بوضع : $z = x + iy$

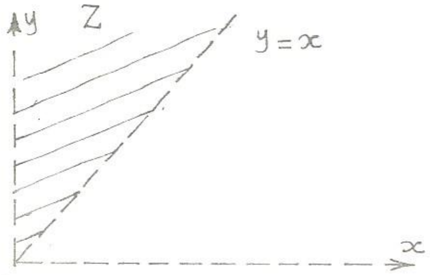
لنحصل على : $|(x-1) + i(y+2)| = 5$

ومنه : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

وهي معادلة دائرة في المستوى Z مركزها النقطة $(1, -2)$ ونصف قطرها 5 .

ج) بما ان : $Re(z) = x$, $Im(z) = y$

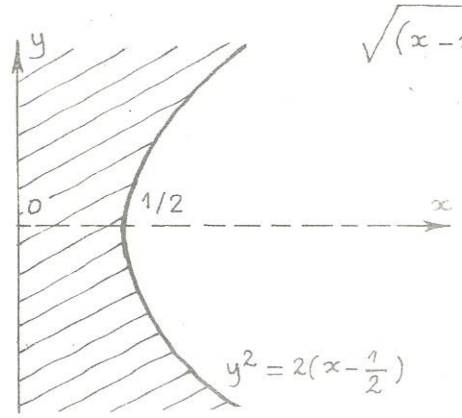
فإن $y > x > 0$



وهو الثمن الثاني من المستوى العقدى Z وقد ظلل النطاق الناتج في الشكل المرافق .

د) بوضع : $z = x + iy$ ينتج $|(x-1) + iy| \geqslant x \geqslant 0$

اى ان : $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geqslant x \geqslant 0$



ومنه فان : $(x-1)^2 + y^2 \geqslant x^2$

أى $y^2 \geqslant 2(x - \frac{1}{2})$.

حيث $x \geqslant 0$ وقد ظللت المنطقة الناتجة في الشكل المرافق .

مســـــائل (١)

١) بسّط التركيب $\frac{3+i4}{\sqrt{2}\,Cis(\pi/4)}$ واضعا الجواب بالشكل الجبرى والمثلثي والاسي .

الجواب $3.5+i\,0.5 = 3.536\ Cis(0.142) = 3.536\ e^{i\,0.142}$

٢) بسّط التركيبين التاليين واضعا الجواب بالشكل الجبرى .

آ) $\frac{Cos\,8x+i\,Sin\,8x}{Cos\,3x+i\,Sin\,3x}$ ب) $\frac{1}{13}-\frac{i(1-i)}{2+i3}$

الجواب :

آ) $Cos\,5x+i\,Sin\,5x$ ب) $\frac{-4+i}{13}$

٣) اذا كان : $Z=\frac{(1-i7)(2-i)}{5+i12}$ فاحسب :

$$arg\,Z\ ,\ |Z|\ ,\ I_m(Z)\ ,\ Re(Z)$$

الجواب :

$$Re(Z)=\frac{-205}{169}\ ,\ I_m(Z)=\frac{-15}{169}$$

$$|Z| = 1.216\ ,\ arg(Z) = 0.073$$

٤) برهن ان :

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

٥ – اوجد الجذور الخمسة للمعادلة : $z^5 = 1$ ومثّل اجوبتك.

الجواب :
$1 \, , \, e^{i2\pi/5} \, , \, e^{i4\pi/5} \, , \, e^{i6\pi/5} \, , \, e^{i8\pi/5}$

٦) اوجد الجذور التكعيبية للعدد $1.6 - i1.2$.

الجواب : $1.231 - i\,0.268 \, , \, -0.848 - i\,0.932 \, , \, -0.383 + i\,1.200$

٧) حل المعادلة $z^4 + z^2 + 1 = 0$ ومثّل الاجوبة .

الجواب : $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

٨) احسب قيم y و x اذا كان $z^5 + 4z^3 = 0$
حيث $z = x + iy$.

الجواب : $(0 \, , \, \pm i2)$ و $(0, 0)$

٩) احسب قيم التراكيب التالية :

آ) $\ln(\sqrt{3} - i)$ ب) $\ln(-4)$

جـ) $(1 + i)^{i}$ د) $(-i)^{-i}$

الجـــواب :

آ) $0.693 + i\,5.760$ ب) $1.386 + i\,3.142$

جـ) $0.433 + i\,0.156$ د) 111.32

١٠) ان احداثيات رؤوس مثلث هي :

$$Z_1 = 1 + i2 \quad , \quad Z_2 = 4 - i2 \quad , \quad Z_3 = 1 - i6$$

برهن انه متساوى الساقين واحسب اطوال اضلاعه •

الجواب : $8 , 5 , 5$

١١) اذا كان Z عددا عقديا معلوما فمثّل التراكيب التالية :

$$Z^2 \quad و \quad \frac{1}{Z} \quad , \quad -Z \quad , \quad \bar{Z}$$

١٢) عيّن في المستوى العقدى Z المجموعات النقطية التالية :

آ) $1 \leqslant |Z - i| \leqslant 2$ ب) $\arg\left(\dfrac{Z-1}{Z-i}\right) = 0$

جـ) $\dfrac{|Z-2|}{|Z+2|} = 1$ د) $\dfrac{|Z+1|}{|Z-2|} > \dfrac{3}{2}$

هـ) $|Z-2||Z+2| = 4$ و) $|Z+3| + |Z-3| \leqslant 10$

الاجوبة :

آ) منطقة بشكل حلقة دائرية مركزها النقطة i ونصفا قطريهما $1, 2$.

ب) المستقيم الواصل بين النقطتين i , 1 .

ج) المحور التخيلي .

د) النطاق الواقع داخل الدائرة التي مركزها النقطة (0 , 4.4) ونصف قطرها 3.6 .

هـ) منحني اللمنسكات $r^2 = 8 \cos 2\theta$.

و) المنطقة المحاطة بالقطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

٢ ـ التوابع العقدية واشتقاقها

٢ – ١ التابع العقدي

تعريفه :

اذا كان : $C \to C : w = f(z)$ (2.1.1)

فان w تابع عقدي للمتحول العقدي المستقل z .

ينتج من ذلك أن :

$$w = u + iv = \rho e^{i\Phi} \quad , \quad z = x + iy = r e^{i\theta} \qquad (2.1.2)$$

حيث $(x, y) = (r, \theta)$ نقطـــة من المستوي Z

و Φ , ρ أو u , v هما تابعان حقيقيان للمتحولين الحقيقين المستقلين θ , r أو x , y .

أي أن $w = f(z)$ هو تطبيق لمجموعة نقطية مفتوحة من المستوي العقدي Z (أي المستوي x y) على المجموعة المفتوحة المقابلة من المستوي العقـــدي W (أي المستوي u v) .

ان التعريف (2.1.2) هو أعم مما نحتاج اليه في الاشتقاق ، وسنركز قدر الامكان على التعريف (2.1.1) بغية ايجاد الشروط الواجب توفرها في التابع العقـــدي $w = f(z)$ لكي تطبق عليه الطرق المستخدمة في التابع الحقيقي لمتحول حقيقي .

الفرع الاساسي :

اذا ارتبطت كل قيمة لمتحول عقدي z بقيمتين أو أكثر لمتحول عقدي آخر w

فنقول ان علاقة الارتباط تعطي فرعين أو أكثر ، ويعتبر كل فرع تابعاً عقديا . نقتصر على أحد الفروع ونعرفه بأنه الفرع الاساسي أو التابع $w = f(z)$.

التابع العكسي :

اذا كان $w = f(z)$ تقابلا فان الصورة العكسية $z = f^{-1}(w)$ وحيدة وهي التابع العكسي للتابع المفروض .

أما اذا كان $w = f(z)$ تابعاً غامراً فان الصورة العكسية تعطي فروعاً عديدة ونقتصر على فرع واحد نعرفه بأنـــه الفرع الاساسي لنحصل على التابع العكسي $z = f^{-1}(w)$ للتابع المفروض .

٢ – ٢ اشتقاق التابع العقدي

نهاية التابع واستمراره :

ان التابع $w = f(z)$ ينتهي الى القيمة المحدودة L عندما تنتهي z الى z_0 على أي منحى في جوار z_0 اذا كان $f(z)$ معرفاً في هذا الجوار أو معرفاً في الجوار بعـــد حذف النقطة z_0 منه ، ولاجل أية قيمة معلومة $\delta > 0$ أمكن ايجاد قيمة $\varepsilon > 0$ بحيث يكون :

$$|f(z) - L| < \delta \quad \text{عندما} \quad |z - z_0| < \varepsilon$$

ونرمز لهذا التناهي بالرمز :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

ان هذا التعريف لا يتطرق الى قيمة $f(z)$ في النقطة z_0 وفي الحالة العامـــة فان $L \neq f(z_0)$ ولكن اذا كان :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

فنقول ان التابع مستمر في النقطة z_0 ويكون التابع مستمراً في نطـــاق $\mathcal{D}$ اذا كان مستمراً في كل نقطة من هذا النطاق .

من هذه التعاريف ينتج أن نظريات النهايات والاستمرار المطبقـــة في التحليل الحقيقي تبقى صحيحة في التحليل العقدي بما فيه تباعد التابع الى اللانهاية .

التابع القابل للاشتقاق :

اذا كان التابع معرفاً في نطاق $\mathcal{D}$ فنقول انه قابل للاشتقاق في النقطـة $z \in \mathcal{D}$ اذا كانت النهاية :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right]$$

وحيدة ومحدودة أياً كان المنحى الذي تنتهي عليه Δz الى الصفر ، وفي هذه الحالة نرمز للمشتق الاول بالرمز :

$$\frac{dw}{dz} = w' = f'(z) = \frac{df}{dz}$$

وتعرف المشتقات الاعلى مرتبة بالطريقة نفسها ونرمز للمشتق من المرتبة n بالرمز :

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f^{(n)}(z) = \frac{d^n f}{dz^n}$$

نستنتج من هذا التعريف أن التابع مستمر في النقطة $z \in \mathcal{D}$ (والا لمـــا انتهت النسبــة $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ الى نهاية وحيدة ومحدودة) ولكن استمرار التابع في النقطة شرط غير كاف لكي يكون قابلا للاشتقاق فيها .

٢ - ٣ التابع التحليلي

تعريفه :

اذا كان التابع $w = f(z)$ قابلا للاشتقاق في كل نقطة من نطاق $\mathcal{D}$ فنقول انه تابع تحليلي في هذا النطاق .

يكون التابع تحليلياً في نقطة z اذا كانت z نقطة داخلية من نطاق يكون فيه $f(z)$ تحليلياً ، ويكون التابع تحليلياً على منحن Γ اذا كان تحليلياً في كل نقطة منه .

يكون التابع تحليلياً في منطقة $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{D}}$ اذا كان تحليلياً في النطاق $\mathcal{D}$ وعلى المنحني Γ المحيط به .

الشرطان اللازمان لكي يكون التابع تحليلياً في نطاق :

اذا كان التابع $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ تحليلياً في نطاق $\mathcal{D}$ فيلزم أن تكون المشتقات $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ موجودة وتحقق معادلتي كوشي — ريمن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ في كل نقطة من $\mathcal{D}$.

البرهان : بما أن $w = f(z)$ قابل للاشتقاق في كل نقطة $z \in \mathcal{D}$ فان النسبة $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ يجب أن تنتهي الى نهاية وحيدة ومحدودة أيا كان المنحى الذي تنتهي عليه $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ الى الصفر .

بأخذ Δz حقيقية أي $\Delta z = \Delta x$ فان النسبة :

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

يجب أن تنتهي الى نهاية وحيدة ومحدودة عندما $\Delta x \to 0$ ومنه فان المشتقين $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ يجب أن يكونا موجودين والنهاية في هذه الحالة تكون :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.3.1)$$

أما اذا أخذنا Δz تخيلية أي $\Delta z = i\,\Delta y$ فان النسبة :

$$\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\,\Delta y} + i\,\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\,\Delta y} =$$

$$\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y} - i\,\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}$$

يجب أن تنتهي الى نهاية وحيدة ومحدودة عندما $\Delta y \to 0$ ومنه فان المشتقين $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ يجب أن يكونا موجودين والنهاية في هذه الحالة هي :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.3.2)$$

ومن تساوي النهايتين (2.3.1) , (2.3.2) ينتج :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ملاحظة :

بتبديل الاحداثيين (x , y) بالاحداثيين (r , θ) ينتج أن الشكل القطبي لمعادلتي كوشي – ريمن هو :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

الشروط الكافية لكي يكون التابع تحليلياً في نطاق :

لكي يكون التابع $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ تحليليـاً في نطـاق $\mathcal{D}$ يكفي أن تكون المشتقـات $\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial v}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ موجودة ومستمرة وتحقق معادلتي كوشي – ريمن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

في كل نقطة من $\mathcal{D}$.

(يتم برهان هذه النظرية باستخدام نظرية القيمة الوسطى لتابع لمتحولين حقيقيين مستقلين ، وبالاعتماد على الشروط اللازمة) .

ملاحظات :

أولا) ان لم تتحقق الشروط الكافية الثلاثة في نطاق $\mathcal{D}$ فالتابع غير تحليلي في هذا النطاق وتوجد توابع عقدية لا تحقق هذه الشروط في أي نطاق من المستوي z .

ثانيا) اذا تحققت الشروط الكافية الثلاثة في كل نقطة من المستوي العقدي فنقول ان التابع تحليلي دوماً .

٢ – ٤ الخواص التفاضلية للتابع التحليلي

أولا) القواعد التفاضلية :

اذا كان $w = f(z)$ تحليلياً في نطاق $\mathcal{D}$ فيتم ايجاد مشتقه الاول (وبالتـــالي

تفاضله الاول) باستخدام القواعد المطبقة على التابع الحقيقي لمتحول حقيقي ، اذ أننا قد استخدمنا في تعريف التابع العقدي القابل للاشتقاق التعريف المطبق على التابع الحقيقي .

ويمكن تعميم هذه النتيجة على ... , $f''(z)$, $f'(z)$ اذا كانت المشتقات بدورها تحليلية ، كما يمكن تعميمها على توابع تحليلية تتألف من عدد محدود من التوابع التحليلية الاخرى ، وينتج من ذلك أنه يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال على التوابع التحليلية .

ثانيا) علاقته بمعادلة لابلاس :

اذا كان $w = f(z) = u + iv$ تحليليا في نطاق $\mathcal{D}$ فينتج من اشتقاق معادلتي كوشي – ريمن أن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

واذا كانت المشتقات الثانية مستمرة فان ترتيب الاشتقاق لا أهمية له ، وينتج من ذلك أن :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

وبالطريقة نفسها نبرهن أن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ومنه فان الجزءين الحقيقي والتخيلي للتابع التحليلي يحققان في $\mathcal{D}$ معادلة لابلاس المستوية .

يدعى الجزءا ن الحقيقي والتخيلي لتابع تحليلي في نطاق بالتابعين المترافقين في هذا النطاق ، وقد برهنا أنهما توافقيان .

يمكن ايجاد أحد التابعين المترافقين (مضاف اليه ثابت اختياري) اذا علم الآخر وذلك باستخدام معادلتي كوشي – ريمن .

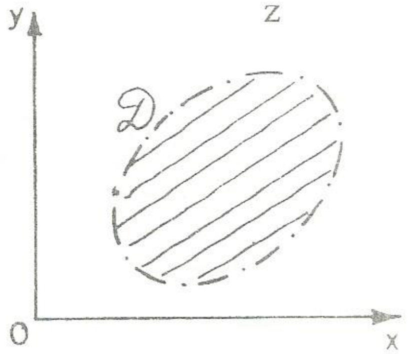
ثالثا) وجود واستمرار المشتقات المتتالية :

ليكن $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{D}}$. سنبرهن لدى دراسة صيغ كوشي التكاملية أنه توجد للتابع مشتقات من أية مرتبة كانت في النطاق $\mathcal{D}$ وبما أن وجود المشتق من المرتبة n يقتضي استمرار المشتق من المرتبة $n - 1$ فجميع المشتقات موجودة ومستمرة .

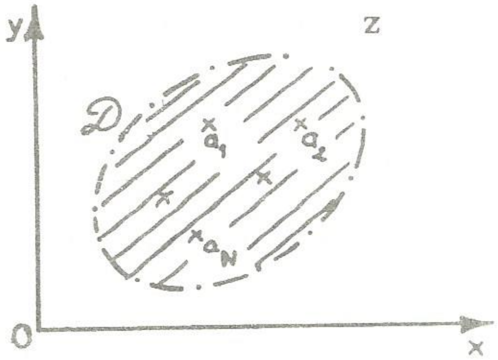
يجب أن نلاحظ أن هذه الخاصة لا تنطبق على التابع الحقيقي لمتحول حقيقي .

٢ – ٥ التابع التحليلي والنقاط الشاذة

ان التابع التحليلي $w = f(z)$ في نطاق محدد $\mathcal{D}$ هو تابع قابل للاشتقاق في كل نقطة من $\mathcal{D}$ وسنمثل ذلك بتظليل النطاق كما في الشكل (١) . ولكن يمكن أن يوجد في هذا النطاق عدد محدود من النقاط $a_1 , a_2 , \ldots , a_N$ يكون فيها التابع غير تحليلي ، وتسمى بالنقاط الشاذة للتابع ، وفي هذه الحالة نقول إن $w = f(z)$ تحليلي في النطاق $\mathcal{D}$ باستثناء النقاط الشاذة $a_1 , a_2 , \ldots , a_N$ وسنمثل ذلك كما في الشكل(٢).



الشكل (١)



الشكل (٢)

اذا كان $\mathcal{D}$ نطاقاً غير محدد فيمكن أن يكون عدد النقاط الشاذة غير محدود .
ان تعيين النقاط الشاذة لتابع مفروض في نطاق مفروض يتم بتعيين النقاط التي يكون فيها التابع غير معرف أو غير مستمر أو غير قابل للاشتقاق ، وسنــدرس في بحث لاحق أنواع النقاط الشاذة ونقتصر في دراستنا على النقاط الشاذة غير الواقعة في اللانهاية.

النقطة العادية : اذا كانت $z = a$ نقطة غير شاذة ، وأمكن ايجاد عـــدد $b > 0$ بحيث لا تحوي الدائرة $|z - a| = b$ الواقعة في $\mathcal{D}$ على أية نقطة شاذة ، فنقول إن $z = a$ هي نقطة عادية للتابع $w = f(z)$ في النطاق $\mathcal{D}$.

٢ - ٦ دراسة التوابع العقدية الابتدائية

ان التوابع التالية مع التوابع التي تنتج عنها بعدد محدود من العمليات الجبريـــة تدعى التوابع العقدية الابتدائية .

سنعين في كل حالة النطاق الذي يكون فيه التابع تحليلياً ، كما سنعين نقاطـــه الشاذة (ان وجدت) ، علماً أننـــا نشتق التابع التحليلي كما نشتق التابع الحقيقي المماثل له .

أولا) تابع كثير الحدود من الدرجة N :

وشكله العام هو :

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{N} A_n z^n = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{N-1} z^{N-1} + A_N z^N$$

حيث $A_0 , \ldots , A_N$ هي ثوابت عقدية و N هو عدد صحيح موجب .

بوضع $z = r e^{i\theta}$ ولأجل $n \neq 0$ ينتج :

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

أي :

$$u_n + i\, v_n = r^n \cos n\theta + i\, r^n \sin n\theta$$

ومنه :

$$u_n = r^n \cos n\theta \qquad , \qquad v_n = r^n \sin n\theta$$

ان المشتقات الاربعة الاولى للجزءين الحقيقي u_n والتخيلي v_n موجودة ومستمرة وتحقق معادلتي كوشي ـ ريمن دوماً ، اذ أن :

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = n\, r^{n-1} \cos n\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial \theta} = -\, n\, r^{n-1} \sin n\theta = -\frac{\partial v_n}{\partial r}$$

فيكون كل حد $A_n z^n$ تحليلياً دوماً ، كما أن A_0 ثابت ويكون كثير الحدود تحليلياً دوماً .

ثانيا) التابع الجبري الكسري العادي :

وشكله العام :

$$w = f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

حيث $h(z)$, $g(z)$ هما كثيرا حدود لا يوجد بينهما عامل مشترك . بما أنه نسبة كثيري حدود فان هذا التابع تحليلي في المستوي Z باستثناء النقاط الشاذة المقابلة لقيم z التي تعدم المخرج وعددها مساو لدرجة المخرج .

ثالثا) التابع الجذري :

وشكله العام :

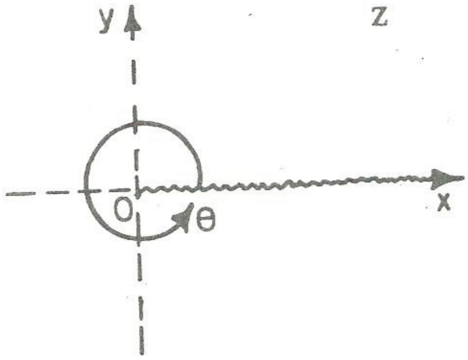
$$w = z^{1/N}$$

حيث N هو عدد صحيح موجب وهو الفرع الاساسي :

$$z^{1/N} = r^{1/N} e^{i(\theta/N)} \quad , \quad (r > 0 \quad , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

للتركيب متعدد القيم التالي :

$$r^{\frac{1}{N}} e^{i\left(\frac{\theta}{N} + \frac{2k\pi}{N}\right)} \quad , \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$



الشكل (٣)

ان الفرع الاساسي عرف في المستوي Z بالاقتصار على $r > 0$ وعلى الزاوية :

$$0 \leqslant \theta < 2\pi$$

وهذا معناه أننا أقمنا حاجزاً لا يمكن عبوره في المستوي Z وهذا الحاجز هو Ox (الشكل ٣) .

يدعى هذا الحاجز بمستقيم التفرع ، وتدعى النقطة O بنقطة التفرع وتنتج هذه النقطة من وضع $z = 0$.

من التعريف ينتج أن :

$$w = z^{\frac{1}{N}} = r^{\frac{1}{N}} e^{i\left(\frac{\theta}{N}\right)} \Rightarrow u + iv = r^{\frac{1}{N}} \cos\frac{\theta}{N} + i\, r^{\frac{1}{N}} \sin\frac{\theta}{N}$$

أي أن :

$$u = r^{\frac{1}{N}} \cos\frac{\theta}{N} \quad , \quad v = r^{\frac{1}{N}} \sin\frac{\theta}{N}$$

ان المشتقات الاربعة الاولى للجزءين الحقيقي والتخيلي هي :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{N} r^{\frac{1}{N} - 1} \cos\frac{\theta}{N} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{N} r^{\frac{1}{N}} \sin\frac{\theta}{N}$$

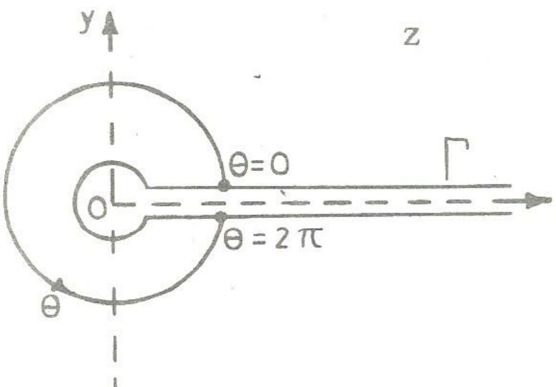
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{N} r^{\frac{1}{N} - 1} \sin\frac{\theta}{N} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{N} r^{\frac{1}{N}} \cos\frac{\theta}{N}$$

وفي نطاق تعريف التابع تكون هذه المشتقات موجودة ومستمرة ، وتحقق معادلتي كوشي ـ ريمن :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

فالتابع الجذري تحليلي في المستوي Z الذي حذف منه O x .

ملاحظة :



الشكل (١)

بدلا من حذف مستقيم التفرع O x من المستوي Z يفضل في بعض حالات التكامل العقدي حذف المنحني Γ المبين في الشكل (٤) والجزآن المستقيمان رسما متباعدين للتوضيح فقط ، وهما في الواقع منطبقان .

في هذه الحالة يتغير تعريف الفرع الأساسي ويصبح مجال قيم θ هو :

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

وعلى الجزء المستقيم العلوي من Γ تقترب θ من الصفر بقيم متناقصة فقط أما على الجزء المستقيم السفلي من Γ فان θ تقترب من 2π بقيم متزايدة فقط .

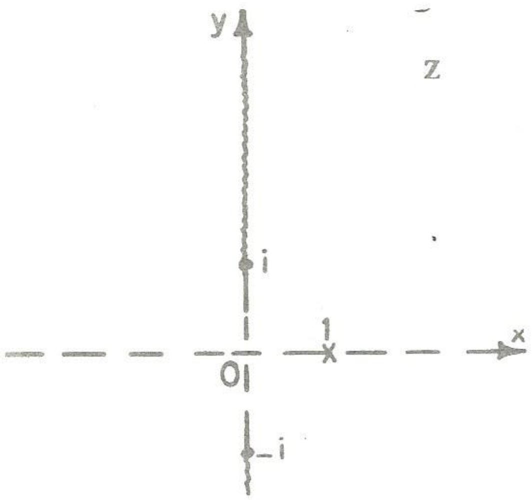
نتيجة : ان التابع الجذري العام $w = [g(z)]^{1/N}$ حيث $g(z)$ كثير حدود أو كسري وهو الفرع الاساسي $[g(z)]^{\frac{1}{N}} = A^{\frac{1}{N}} e^{i\frac{\alpha}{N}}$ للتركيب متعدد القيم :

$$A^{\frac{1}{N}} e^{i\left(\frac{\alpha}{N} + \frac{2k\pi}{N}\right)} \quad , \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

حيث $|g(z)| = A > 0 \quad , \quad 0 \leqslant \arg[g(z)] = \alpha < 2\pi$

في المستوي Z الذي حذفت منه مستقيمات التفرع يكون التابع w تحليلياً باستثناء النقاط الشاذة للتابع $g(z)$ علماً أن نقاط التفرع تنتج من وضع $g(z) = 0$ وأن مستقيمات التفرع هي مستقيمات تنطلق من كل نقطة تفرع الى آخر المستوي العقدي مبتعدة عن النقطة O . ان الشكل (٥) يبين طريقة التمثيل في نقطتي التفرع $z = \mp i$ للتابع :

$$w = \left[\frac{z^2+1}{z-1}\right]^{1/2}$$



الشكل (٥)

مع العلم أن $z = 1$ هي النقطة الشاذة الوحيدة للتابع w في المستوي العقدي الذي حذف منه مستقيما التفرع .

رابعا) **التابع الاسي والتابع اللغاريتمي :**

التابع الاسي وشكله العام هو :

$$w = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} (\cos y + i \sin y)$$

ومنه فان :

$$\arg (e^{z}) = y \qquad , \qquad \left| e^{z} \right| = e^{x}$$

ان المشتقات الاربعة الاولى لجزءيه الحقيقي $u = e^{x} \cos y$ والتخيلي $v = e^{x} \sin y$ موجودة ومستمرة ، وتحقق معادلتي كوشي - ريمن دوماً اذ أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x} \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - e^{x} \sin y = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

فالتابع تحليلي دوماً .

يجب أن نلاحظ أن التابع الأسي هو تابع دوري ودوره $2\pi i$ لأن :

$$w = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2k\pi)}$$

حيث k هو عدد صحيح .

التابع اللغاريتمي وشكله العام هو :

$$w = \ln z$$

وهو الفرع الاساسي :

$$\ln z = \ln r + i\,\theta \quad , \quad (r > 0\,,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

للتركيب متعدد القيم التالي :

$$\ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad , \quad (k = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots)$$

وكما في حالة التابع الجذري $z^{1/N}$ فان Ox هو مستقيم التفرع (**الشكل ٣**) والنقطة O هي نقطة التفرع وتنتج من وضع $z = 0$.

ان المشتقات الاربعة الاولى للجزء الحقيقي $u = \ln r$ وللجزء التخيلي $v = \theta$ هي :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

وفي نطاق تعريف التابع تكون هذه المشتقات موجودة ومستمرة ، وتحقق معادلتي كوشي - ريمن :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

فالتابع تحليلي في المستوي **z** الذي حذف منه Ox .

نتائج :

- ان التابع اللغاريتمي العام $w = \ln[g(z)]$ حيث $g(z)$ كثير حدود أو كسري أو جذري عام هو الفرع الاساسي $\ln[g(z)] = \ln A + i\alpha$ للتركيب متعدد القيم التالي :

$$\ln A + i(\alpha + 2k\pi) \quad , \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

حيث $|g(z)| = A > 0 \quad , \quad 0 \leqslant \arg[g(z)] = \alpha < 2\pi$

في المستوي Z الذي حذفت منه مستقيمات التفرع يكون $w = \ln[g(z)]$ تحليلياً .
للتابع $g(z)$ نقاط تفرع اذا كان جذريا عاما أما بالنسبة للتابع اللغاريتمي العام فتميز بين حالتين ، الاولى عندما يكون $g(z)$ غير كسري والثانية عندما يكون كسريا ، وعندئذ :

$$w = \ln[g(z)] = \ln\left[\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right] = \ln[g_1(z)] - \ln[g_2(z)]$$

نقاط التفرع في الحالة الاولى تنتج من وضع $g(z) = 0$ وفي الحالة الثانية تنتج من وضع $g_1(z) = 0 \ , \ g_2(z) = 0$ مع العلم أن كل نقطة تفرع يقابلها مستقيم تفرع ينطلق منها الى آخر المستوي مبتعداً عن المبدأ O .

– التابع الأسي العام : $w = [g(z)]^{h(z)}$

وينسب الى التابع اللغاريتمي العام كما يلي :

$$w = e^{h(z)\ln[g(z)]}$$

ويعتبر $w = e^{iz}$ تابعاً أسياً عاماً لأن :

$$(e^z)^i = e^{i\ln e^z} = e^{iz}$$

خامساً) التوابع الدائرية والقطعية وتوابعها العكسية :

التوابع الدائرية والقطعية : وتنسب الى التابع الاسي والاسي العام كما يلي :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$cosec\, z = \frac{1}{\sin z} \quad , \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , \quad \cot z = \frac{1}{tg\, z}$$

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad , \quad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}$$

$$cosech\, z = \frac{1}{sh\, z} \quad , \quad sech\, z = \frac{1}{ch\, z} \quad , \quad coth\, z = \frac{1}{th\, z}$$

أي أنها تعرف كمثيلاتها في التوابع الحقيقية ، فتنطبق عليها الخواص والمتطابقات الدائرية أو القطعية الحقيقية .

ان العلاقات التالية تسمح بالانتقال من الدائري الى القطعي وبالعكس :

$$\begin{cases} \cos iz = ch\, z \\ \sin iz = i\, sh\, z \end{cases} \qquad \begin{cases} ch\, iz = \cos z \\ sh\, iz = i \sin z \end{cases}$$

التوابع الدائرية والقطعية العكسية: ويمكن أن تنسب كلها الى التابع اللغاريتمي العام كما في الجدول التالي ، وقد أوردت فيه نقطتا التفرع في كل حالة . في المستوي Z الذي حذف منه مستقيما التفرع تكون هذه التوابع تحليلية .

$$w = \sin^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln \left[iz + (1 - z^2)^{1/2} \right] \quad , \quad (z = \pm 1)$$

$$w = \cos^{-1}(z) = \frac{1}{i} \ln \left[z + (z^2 - 1)^{1/2} \right] \quad , \quad (z = \pm 1)$$

$$w = tg^{-1}(z) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) \qquad , \quad (z = \pm i)$$

$$w = sh^{-1}(z) = \ln \left[z + (z^2+1)^{1/2} \right] \qquad , \quad (z = \pm i)$$

$$w = ch^{-1}(z) = \ln \left[z + (z^2-1)^{1/2} \right] \qquad , \quad (z = \pm 1)$$

$$w = th^{-1}(z) = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \qquad , \quad (z = \pm 1)$$

ويجب أن نلاحظ أن نقاط التفرع في حالة تابعي الجيب وجيب التمام المكسيين تنتج من وجود تابع جذري عام في اللغاريتم المذكور فيها .

سادسا) التابع الكسرى ذو صورة ومخرج تحليليين :

انه تابع تحليلي في المستوى العقدى Z باستثناء نقاط شاذة هي قيم Z التي تعدم المخرج دون ان تعدم الصورة ، اما اذا انعدما معا فاننا نستخدم قاعدة لوبيتال للتأكد من بقاء الشذوذ .

امثلـــــــــة (٢)

مثال ٢-١-١

ان التركيب $w = z^3$ هو تابع عقدى لانه لأجل أيـة قيمـــة لـ (z) تنتج قيمة وحيدة لـ (w) .

ان الجزئين الحقيقي u والتخيلي v ينتجان من :

$$u + iv = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

فيكـــــون $u = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad v = 3x^2y - y^3$

مثال ٢-١-٢

ان التركيب $w = z^{1/3}$ له ثلاثة فروع اذ بوضع $z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$ ينتج من قانون دو موافر ان :

$$w_1 = r^{1/3} e^{i\theta/3} \quad , \quad w_2 = r^{1/3} e^{i(\theta/3 + 2\pi/3)} \quad , \quad w_3 = r^{1/3} e^{i(\theta/3 + \frac{4\pi}{3})}$$

حيث $r > 0$ ونعرف الفرع الاساسي بأنه w_1 .

وبالاقتصار على الفرع الاساسي يكون $w = z^{1/3}$ تابعا عقديـا والجزءان الحقيقي u والتخيلي v ينتجان من :

$$u + iv = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i \sin\frac{\theta}{3}\right)$$

فيكـــون : $u = r^{1/3} \cos\frac{\theta}{3} \quad , \quad v = r^{1/3} \sin\frac{\theta}{3}$

مثال ٢-١-٣

ان الصورة العكسية للتابع العقدى $w = 3z - 2$ هي $z = \frac{w+2}{3}$ وبما ان الجواب الناتج وحيد القيمة ، فانه التابع العكسي للتابع المفروض .

مثال ٢-١-٤

ان الصورة العكسية للتابع $w = z^3$ هي $z = w^{1/3}$. بوضع $w = \rho e^{i\phi}$ تنتج الفروع الثلاثة :

$$z_1 = \rho^{1/3} e^{i\phi/3} \quad , \quad z_2 = \rho^{1/3} e^{i(\phi/3 + 2\pi/3)} \quad , \quad z_3 = \rho^{1/3} e^{i(\phi/3 + 4\pi/3)}$$

ونعرف الفرع الاساسي بأنه $z_1 = \rho^{1/3} e^{i\phi/3}$ لنحصل على التابع العكسي $z = w^{1/3}$.

مثال ٢-٣-١

برهن ان التابع $w = z^3$ تحليلي دوما .

الحل :

$$w = u + iv = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

ومنه : $u = x^3 - 3xy^2 \quad , \quad v = 3x^2y - y^3$

ان المشتقات الجزئية الاربعة الاولى للتابعين u , v موجودة ومستمرة دوما (لانهما كثيرا حدود) كما ان :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

اى ان معادلتي كوشي - ريمن محققتان دوما ونظرا لتحقق الشروط الكافية الثلاثة في كل نقطة من المستوى العقدى فان $w = z^3$ تحليلي دوما .

مثال ٢-٣-٢

اختبر ما اذا كان التابعان التاليان تحليليين :

آ) $w = 2Z + \bar{Z}$ ب) $w = |Z|^2$

الحل : آ) $w = u + iv = 2(x+iy) + (x-iy)$

ومنه $u = 3x \quad , \quad v = y$

ان المشتقات الجزئية الاربعة الاولى للتابعين u, v موجودة ومستمرة ولكن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \quad , \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

فالتابع غير تحليلي في اى نطاق لعدم تحقق احدى معادلتي كوشي - ريمن ٠

ب) $w = u + iv = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$

ومنه $u = x^2 + y^2 \quad , \quad v = 0$

ان المشتقات الجزئية الاربعة الاولى للتابعين u, v موجودة ومستمرة دوما وهي :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

ولكن معادلتي كوشي - ريمن لاتتحققان الا في النقطة الوحيدة $x = y = 0$ وبالتالي فالتابع غير تحليلي اذ لا يوجد نطاق يحوى النقطة $(0, 0)$ ويكون فيه المشتق موجودا ٠

مثال ٢-٦-١

اوجد قيم التركيبين :

آ) $sh(1+i)$ ب) $\cos^{-1}(i)$

<u>الحل</u> آ)من قانون الجيب القطعي لمجموع ينتج ان :

$$sh(1+i) = sh1 \; ch i + ch1 \; shi$$
$$= sh1 \cos1 + i \, ch1 \sin 1$$

وذلك لان $chi = \cos 1$, $shi = i\sin 1$ ومنه :

$$sh(1+i) = 0.635 + i \; 1.298$$

ب) من القانون

$\cos^{-1}(Z) = \frac{1}{i} \ln\left[Z + (Z^2-1)^{1/2}\right]$ ينتج :

$$\cos^{-1}(i) = -i \ln\left[i + (i^2 2)^{1/2}\right] = -i \ln\left[i + \sqrt{2}\, i\right]$$
$$= -i \ln\left[(\sqrt{2}+1)\, e^{i\pi/2}\right]$$

وذلك لان $e^{i\pi/2} = i = (i^2)^{1/2}$ بالقيمة الاساسية ومنه :

$$\cos^{-1}(i) = -i\left\{\ln(\sqrt{2}+1) + i\frac{\pi}{2}\right\} = -i\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{2} =$$
$$= 1.571 - i \; 0.881$$

مثال ٢-٦-٢

أوجد الجذور جميعها للمعادلة $e^Z = 1 - i$.

<u>الحل :</u> $1-i$ نقطة من الربع الرابع من المستوى Z وبالتحويل الى الشكل الاسي واخذ جميع قيم السعة ينتج :

$$1 - i = \sqrt{2}\; e^{i(7\pi/4 + 2k\pi)}$$

وبما ان : $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} . e^{iy}$ فان :

$$e^{x} . e^{iy} = \sqrt{2} . e^{i(7\pi/4 + 2k\pi)}$$

ومنه : $e^{x} = \sqrt{2} \quad , \quad y = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

اى : $x = \frac{1}{2} \ln 2 \quad , \quad y = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

فيكون : $z = \frac{1}{2} \ln 2 + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$

$$= 0.347 + i(5.500 + 3.142\,k)$$

مثال ٢-٦-٣

عيّن تابعا مترافقا مع التابع $Re(\cos z)$ وبرهن انهما توافقيان دوما .

الحل : ان التابع $w = \cos z$ تحليلي دوما ومنه :

$$u + iv = Re(\cos z) + i Im(\cos z)$$

فيكون جزؤه التخيلي $Im(\cos z)$ مترافقا مع جزئه الحقيقي $Re(\cos z)$ وكلاهما توافقيان دوما لانها خاصة من خواص التابع التحليلي .

مثال ٢-٦-٤

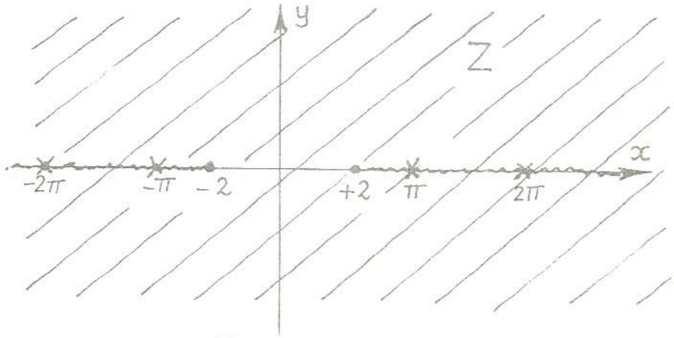
اوجد مشتقات التوابع التالية مع تعيين النقاط الشاذة ومستقيمات التفرع في كل حالة :

$$w = \frac{z}{1+\cos z} + \sin^{-1}\left(\frac{z}{2}\right) \quad (\text{ب} \qquad w = (z^2 - 2z)\ln z \quad (\text{آ}$$

<u>الحـل :</u> آ) ان التـابع $z^2 - 2z$ كثير حدود فهو تحليلي دومـــا والتـابع $\ln z$ تحليلي في المستوى z الذى حذف منه مستقيـــم التفرع Ox فالتـابع w تحليلي ايضا في هذا المستوى وينتج باستخدام قاعدة مشتق جداء تابعين ان :

$$w' = (2z-2)\ln z + (z^2 - 2z)\left(\frac{1}{z}\right) = 2(z-1)\ln z + (z-2)$$

ب) ان التـابع $\frac{z}{1+\cos z}$ تحليلي باستثناء النقاط الشـــاذة $z = (2k+1)\pi$ وهي النقاط التي ينعدم فيها مخرجه ،بينمايوجد للتابع $\sin^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)$ مستقيما تفرع ينطلقان من نقطتي التفرع $z = \pm 2$ حتى آخر المستوي وينطبقان على المحورالحقيقي كماهومبين فيالشكل:



ان التـابع w تحليلي في المستوى z الذى حذف منه هـــذان المستقيمان ومشتقه هو :

$$w' = \frac{1 + \cos z + z\sin z}{(1+\cos z)^2} + \frac{1}{(4 - z^2)^{1/2}}$$

مثال ٢-٦-٥

احسب قيمة ما يلي :

$$\lim_{z \to 0}\left(\frac{z - \sin z}{z^3}\right) \quad (\text{ب} \qquad \lim_{z \to e^{i\pi/3}}\left(\frac{z - e^{i\pi/3}}{z^3 + 1}\right) \quad (\text{آ}$$

الحـل : آ) ان الصورة والمخرج كثيرا حدود فهما تحليليان دوما

ولكن :
$$\lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left(\frac{z - e^{i\pi/3}}{z^3 + 1} \right) = \frac{0}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

للتخلص من عدم التعيين نستخدم قاعدة لوبيتال فينتج :

$$\lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left(\frac{z - e^{i\pi/3}}{z^3 + 1} \right) = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left(\frac{1}{3 z^2} \right) = \frac{1}{3 e^{i2\pi/3}} = \frac{e^{i4\pi/3}}{3}$$

ب) ان الصورة تحليلية دوما لانها مكونة من تابعين تحليليين

كما ان المخرج تحليلي دوما لانه كثير حدود ولكن :

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{z - \sin z}{z^3} \right) = \frac{0}{0}$$

للتخلص من عدم التعيين نستخدم قاعدة لوبيتال ثلاث مرات متتالية

للحصول على :

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{z - \sin z}{z^3} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1 - \cos z}{3 z^2} \right) =$$

$$\lim_{z \to 0} \left(\frac{\sin z}{6 z} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\cos z}{6} \right) = \frac{1}{6}$$

مثال ٢-٦-٦

برهن ان التابع $u(x,y) = 2x(1-y)$ توافقي واوجد التابع

المترافق معه $v(x,y)$ ثم اكتب التركيب $u + iv$ كتابع

تحليلي دوما للمتحول $z = x+iy$.

الحل : لدينا $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

ومنه $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ لاجل جميع قيم x, y فيمكن اعتبار $u(x,y)$ على انه الجزء الحقيقي لتابع تحليلي دوما وبما ان $v(x,y)$ تابع مترافق معه فرضا فان :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y) = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = 2y - y^2 + f_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow v = x^2 + f_2(y)$$

حيث f_2 , f_1 هما تابعان اختياريان . ان اجتماع هذين الحلين هو : $v = x^2 + 2y - y^2 + C$ حيث C هو ثابت اختياري ويكون :

$$u + iv = 2x - 2xy + i(x^2 + 2y - y^2) + iC$$

ومنه :

$$f(x+iy) = 2(x+iy) + i(x^2 + i2xy - y^2) + iC$$

$$= 2(x+iy) + i(x+iy)^2 + iC$$

اى :

$$f(z) = 2z + iz^2 + iC$$

مثال ٢-٦-٧

عيّن مستعينا بالرسم النطاق الذى تكون فيه التوابع التالية تحليلية :

آ) $w = \frac{z}{ch\ z}$ ب) $w = \frac{z - e^{z}}{\sin z}$

جـ) $w = \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)}$ د) $w = \ln\left[2z + (z^2 - 3)^{1/2}\right]$

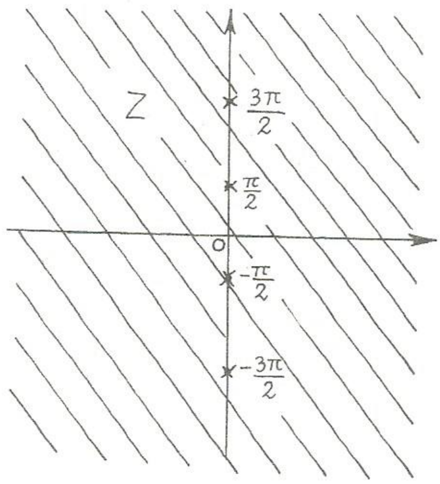
<u>الحـل :</u>

آ) ان $w = \frac{z}{ch\ z}$ هو تابع كسرى ذو صورة ومخرج تحليليين ولكن له نقاط شاذة عند انعدام المخرج اى عندما :

$$ch\ z = \cos(iz) = 0$$

وذلك باستخدام علاقة الانتقال من القطعي الى الدائري وبالتالي فان النقاط الشاذة هي :

$$z = \frac{1}{i}\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



والشكل المرافق يبين النقاط الشاذة والتابع تحليلي فيما عداها .

ب) إن $w = \dfrac{1 - e^{z}}{\sin z}$ هو تابع كسري ذو صورة ومخرج تحليليين

والمخرج ينعدم لاجل : $\sin z = 0$

$$z = k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

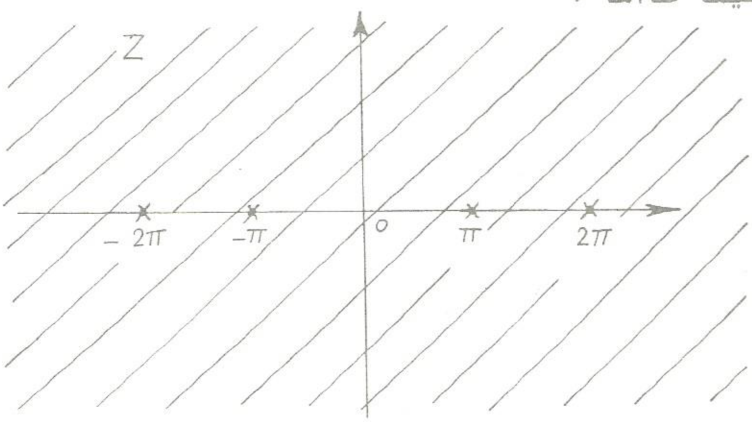
ولكن لاجل $z = 0$ نلاحظ انعدام الصورة ايضا ونزيل عدم التعيين بواسطة قاعدة لوبيتال فينتج :

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{z}}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{-e^{z}}{\cos z} = -1$$

والنقاط الشاذة هي :

$$z = k'\pi \quad , \quad k' = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

والشكل المرافق يبين النقاط الشاذة والتابع تحليلي فيما عداها .



ج) باستخدام القانون المثلثي الخاص بالانتقال الى ضعفي الزاوية نرى ان :

$$w = \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin^2\left(\frac{\pi z}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos(\pi z)}{2}} = \frac{2}{\cos(\pi z)}$$

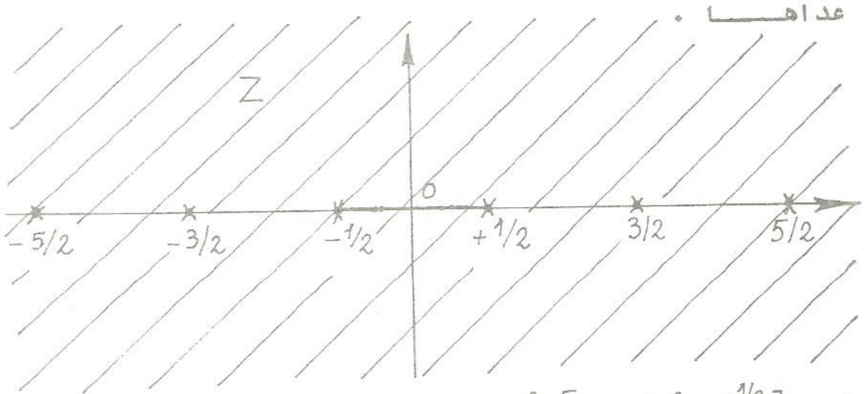
وهو تابع كسرى ذو صورة ومخرج تحليليين وينعدم مخرجه عندما :

$$\cos(\pi z) = 0$$

ومنه فان نقاطه الشاذة هي :

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

والشكل المرافق يبين النقاط الشاذة والتابع تحليلي فيما عداها .



د) ان $w = \ln\left[2z + (z^2 - 3)^{1/2}\right]$ هو تابع لغاريتمي عام وله نقاط تفرع عندما ينعدم مضمون اللغاريتم اى عندما :

$$2Z + (Z^2 - 3)^{1/2} = 0$$

ومنه :

$$Z^2 = -1$$

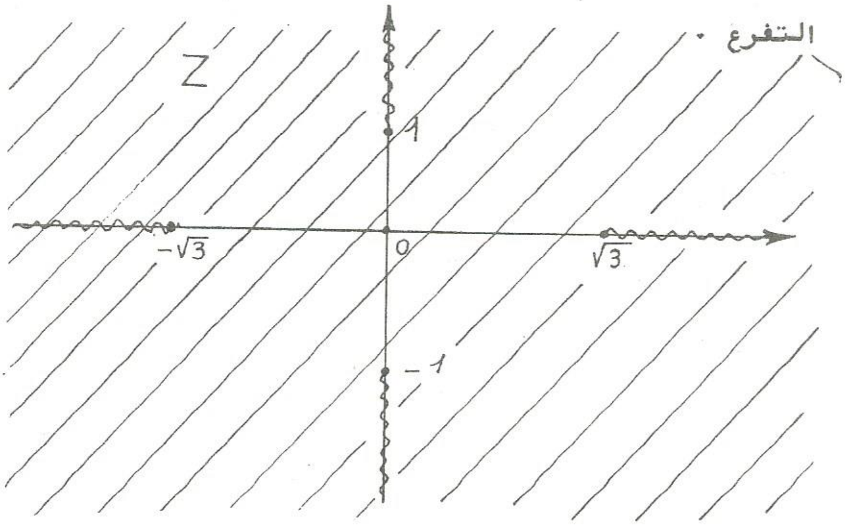
$$Z = \pm i$$

كما انه توجد نقاط تفرع ناتجة من انعدام التابع الجذرى العام $(Z^2 - 3)^{1/2}$ اى عندما :

$$Z^2 - 3 = 0$$

$$Z = \pm\sqrt{3}$$

والشكل المرافق يبين مستقيمات التفرع الاربعة ويكون التابع تحليليا في المستوى العقدى Z الذى حذفت منه مستقيمات التفرع .



مســــائل (٢)

١) أوجد مشتقات التوابع التالية مبينا النقاط الشاذة ومستقيمات التفرع (في حال وجودها) :

آ) $w = \dfrac{3Z}{Z^2+Z+1}$ ب) $w = \ln(Z^3 - 2Z^2)$

جـ) $w = \left(\dfrac{Z+1}{Z^2}\right)^{1/3}$ د) $w = \dfrac{\sin Z}{Z^3}$

هـ) $w = \dfrac{e^Z - 1}{Z^2}$ و) $w = th^{-1}(2Z)$

الحــل :

آ) $w' = \dfrac{-3(Z^2-1)}{(Z^2+Z+1)^2}$ وله نقطتان شاذتان $Z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

ب) $w' = \dfrac{3Z-4}{Z^2-2Z}$ وله مستقيما تفرع ينطلقان مــن النقطتين $Z=2$, $Z=0$.

جـ) $w' = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{Z+1}{Z^2}\right)^{-2/3}\left(\dfrac{Z+2}{Z^3}\right)$ وله نقطة شاذة $Z=0$ ومستقيم تفرع ينطلق من النقطة $Z=-1$.

د) $w' = \dfrac{Z\cos Z - 3\sin Z}{Z^4}$ وله نقطة شاذة $Z=0$.

هـ) $w' = \dfrac{Ze^Z - 2e^Z + 2}{Z^3}$ وله نقطة شاذة $Z=0$.

و) $w' = \dfrac{2}{1-4Z^2}$ وله مستقيما تفرع ينطلقان من النقطتين $Z = \pm\dfrac{1}{2}$.

٢) برهن ان $w = u + iv = ch\,Z$ تابع تحليلي دوما واستنتج من ذلك ان v , u تابعان توافقيان.

٣) اذا كان $r \neq 0$ فبرهن ان التابعين الحقيقيين :

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos\theta \quad , \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\theta$$

هما الجزءان الحقيقي والتخيلي للتابع التحليلي :

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u + iv$$

ثم اوجد $f(z)$.

الجواب : $f(z) = z + \frac{1}{z}$

٤) برهن ان التوابع التالية غير تحليلية :

آ) $w = \cos y - i \sin y$ ب) $w = x^2 - i y^2$

٥) اوجد الجذور جميعها في المعادلات التالية :

آ) $e^{4z} = i$ ب) $ch\, z = i$

الجواب : آ) $z = \frac{i\pi}{4}\left(2k + \frac{1}{2}\right)$

ب) $z = \ln(\sqrt{2}+1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

و $z = \ln(\sqrt{2}-1) + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

٦) اوجد التابع التحليلي دوما $f(z)$ المحقق للشرطين التاليين :

$$Re\left[f'(z)\right] = 3x^2 - 4y - 3y^2 \quad , \quad f(1+i) = 0$$

الجواب : $f(z) = z^3 + 2i z^2 + 6 - i2$

٣ ـ التكاملات العقدية و نظرية و صيغ كوشي التكاملية

٣ ـ ١ التكامل الخطي العقدي

تعريفه وطريقة حسابه :

ليكن Γ منحنياً مستوياً محدداً وموجهاً وصقيلا جزئياً (ويعتبر المنحني الصقيل حالة خاصة) وليكن التابع العقدي :

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

مستمراً على Γ . ان التكامل الخطي العقـدي للتابع $f(z)$ على المنحني Γ (أو اختصاراً التكامل على Γ) هو :

$$(3.1.1) \qquad \int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma (u + i v)\, d(x + i y)$$

$$= \int_\Gamma (u\, dx - v\, dy) + i \int_\Gamma (v\, dx + u\, dy)$$

أي أنه يتألف من مجموع تكاملين خطيين حقيقيين على منحن موجه وهما موجودان لان $f(z)$ مستمر على Γ وبالتالي فان جزئيه الحقيقي u والتخيلي v مستمران على Γ .

يمكن للمنحني Γ أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً ، ونرمز للتكامل على منحن مغلق بالرمز $\oint_\Gamma f(z)\, dz$ ويعتبر الاتجـاه على Γ موجباً اذا كان الدوران عليه معاكساً لدوران عقارب الساعة . يدعى المنحني الصقيل جزئياً بالاطار .

يتضح من هذا التعريف أن قيمة التكامل العقـــدي ترتبط بمسار المكاملة ، ولا يكون التكامل مستقلا عن المسار الا ضمن شروط خاصة .

ملاحظات :

أولا) فيما يلي نقصد بالمنحني أو الاطار المنحني المستوي المحدد والصقيل جزئياً (ويعتبر المنحني الصقيل حالة خاصة) والمفتوح أو المغلق والموجه ، علماً أن الاتجاه الموجب على المنحني المغلق هو الاتجاه المعاكس لدوران عقارب الساعة .

ثانياً) ان هذا المنحني لا يمكن أن يقطع أي مستقيم من مستقيمات تفرع التابع (ان وجدت) اذ أن التابع غير مستمر عليها .

خواصه :

ليكن $f(z)$, $g(z)$ تابعين مستمرين على منحن Γ طوله L . لتكن a , b , m ثلاث نقاط على Γ . نورد فيما يلي أهم الخواص :

أولا) $\int_{\Gamma}[f(z) \pm g(z)]\,dz = \int_{\Gamma} f(z)\,dz \pm \int_{\Gamma} g(z)\,dz$

ثانيا) $\int_{\Gamma} A f(z)\,dz = A \int_{\Gamma} f(z)\,dz$ حيث A هو ثابت

ثالثا) $\int_{\widehat{ab}} f(z)\,dz = - \int_{\widehat{ba}} f(z)\,dz$

رابعاً) $\int_{\widehat{ab}} f(z)\,dz = \int_{\widehat{am}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{mb}} f(z)\,dz$

خامساً) اذا كان $|f(z)| \leqslant M$ حيث M هو ثابت موجب فان :

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant ML$$

ويمكن أن نعدد خواص أخرى ، وكلها تشبه خواص التكاملات الخطية الحقيقية الموجهة ، كما يمكن تعميم هذه الخواص على أي عدد محدود من التوابع .

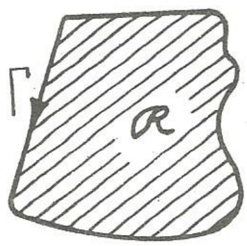
٣ - ٢ نظرية كوشي

اذا كان التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة $\mathcal{R}$ التي يحيط بها المنحني Γ فان :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

ويجب أن نلاحظ أن $\mathcal{R}$ (الشكل ١) هي منطقة بسيطة الاتصال ، اذ يحيط بها منحن مستمر لأنه صقيل جزئياً .

البرهان : نظراً لتعقيد برهان النظرية في الحالة التي يكون فيها التابع تحليلياً (أي له مشتق في كل نقطة من $\mathcal{R}$) فاننا نكتفي ببرهان النظرية في الحالة الخاصة التي يكون فيها $f'(z)$ مستمراً على $\mathcal{R}$. لدينا :



الشكل (١)

$$(3.2.1) \qquad \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} (u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\Gamma} (v\,dx + u\,dy)$$

بما أن المشتق الأول للتابع مستمر وهو :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

فينتج أن المشتقات الجزئية الاولى للتابعين v , u مستمرة ، ويمكن تطبيق نظرية غرين في المستوي على كل من التكاملين الخطيين الحقيقيين الموجهين في الطرف الايمن من (3.2.1) لنحصل على :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (3.2.2)$$

ولكن f (z) تحليلي في $\mathcal{R}$ أي أن المشتقات الاولى لجزئيه الحقيقي u والتخيلي v تحقق معادلتي كوشي - ريمن في كل نقطة من $\mathcal{R}$ فينعدم التكاملان في الطرف الايمن من (3.2.2) وينتج المطلوب .

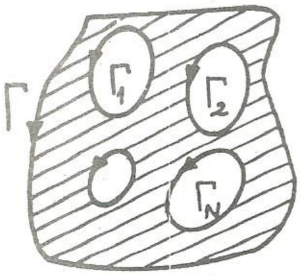
نتائج :

أولا) المنحنيات المتكافئة لتابع تحليلي :

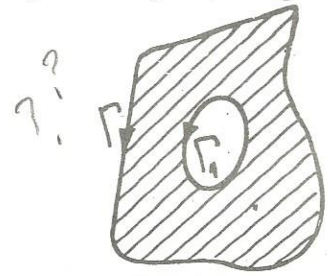
إن :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz$$

(الشكل ٢) أي أنه يمكن الانتقال من منحن لآخر ما دام التابع تحليليــاً في المنطقة المحاطة بهذين المنحنيين ، ويدعى Γ , Γ_1 في هذه الحالة بالمنحنيين أو الاطارين المتكافئين للتابع f (z) . في المنطقة غير المظللة في الشكل (٢) يمكن أن يكون



الشكل (٣)



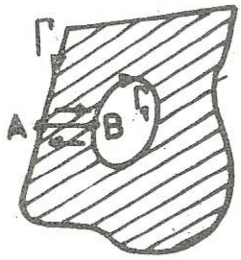
الشكل (٢)

$f(z)$ تحليلياً باستثناء عدد محدود من النقاط الشاذة، كما يمكن أن يكون غير تحليلي.

تعمم هذه النتيجة (الشكل ٣) للحصول على :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\Gamma_N} f(z)\,dz$$

البرهان : في الشكل (٤) نصل بين المنحنيين Γ, Γ_1 بمستقيم AB فيكون التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة التي يحيط بها المنحني المغلق المؤلف من Γ, Γ_1 ومن المستقيم AB مأخوذاً في اتجاهين متعاكسين، كما هو مبين في الشكل



الشكل (٤)

(٤) . بتطبيق نظرية كوشي على هذه المنطقة ينتج :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{BA}} f(z)\,dz = 0$$

أي أن :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz - \int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz = 0$$

ومنه :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz$$

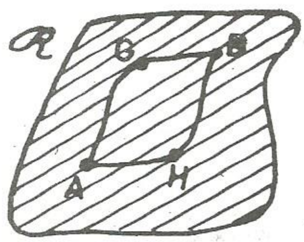
والمنحنيان موجهان في الاتجاه الموجب . ان التعميم يبرهن بطريقة مشابهة .

ثانيا) **استقلال تكامل التابع التحليلي عن المسار :**

اذا كان f (z) تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال $\mathcal{R}$ وكان Γ منحنياً مفتوحاً واقعاً بكليته في $\mathcal{R}$ ويصل بين النقطتين B , A فان $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ مستقل عن المسار Γ أي أن :

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz = \left[F(z) \right]_{A}^{B} = F(B) - F(A)$$

حيث F (z) هو تابع أصلي للتابع f (z) . وبعبارة أخرى يتم حساب التكامل العقدي في هذه الحالة كما يحسب التكامل المحدد لتابع حقيقي لمتحول حقيقي .



الشكل (٥)

البرهان : من الشكل (٥)

ومن نظرية كوشي ينتج أن :

$$\oint_{AHBGA} f(z)\,dz = 0$$

ومنه :

$$\int_{\overrightarrow{AHB}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{BGA}} f(z)\,dz = 0$$

أي أن :

$$\int_{\overrightarrow{AHB}} f(z)\,dz = \int_{\overrightarrow{AGB}} f(z)\,dz$$

فيكون التكامل مستقلا عن المسار الواصل بين النقطتين B , A .

٣ – ٣ صيغ كوشي التكاملية

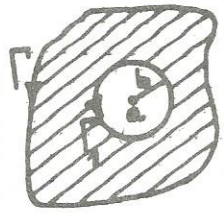
نظرية : اذا كان التابع f (z) تحليلياً في المنطقة $\mathcal{R}$ التي يحيط بهـا المنحني المغلق Γ (وهي منطقة بسيطة الاتصال لأن Γ منحن مستمر) واذا كانت a نقطـة داخلية من المنطقة $\mathcal{R}$ فان :

أولا)
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

ثانيا)
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

وتعطي الصيغة الاولى قيمة التابع في نقطة مفروضة من المستوي العقدي ، بينما تعطي الصيغة الثانية قيمة المشتق النوني لهذا التابع في النقطة ، وذلك عندما نعلم قيمة التابع على منحن مغلق يحيط بالنقطة .

يمكن استخدام صيغتي كوشي التكامليتين بشكل عكسي لحساب التكاملات الواردة في اطرافهـا اليمنى ، دون الحاجة الى تنفيـذ المكاملة .



الشكل (٦)

البرهان : أولا) ان التابـع $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلي باستثنـاء النقطـة الشاذة $z = a$.

نحيط النقطة الشاذة بالدائرة Γ_1 فيكون $\frac{f(z)}{z-a}$ تحليلياً في المنطقة المحاطـة

بالمنحنيين (الشكل ٦) أي أن Γ_1, Γ هما منحنيان متكافئان لهذا التابع ، ومن النتيجة الاولى لنظرية كوشي يكون :

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad (3.3.1)$$

لتكن $|z-a| = b$ معادلة Γ_1 فيكون $z - a = b e^{i\theta}$ ومنه $dz = i b e^{i\theta} d\theta$. ينتج من ذلك أن :

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a + b e^{i\theta}) d\theta$$

يمكن أن نجعل الدائرة صغيرة بقدر ما نشاء ، وعندما $b \to 0$ وبما أن $f(z)$ مستمر على $\mathcal{R}$ فان :

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a)$$

بتعويض هذا الناتج في (3.3.1) يكون :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad (3.3.2)$$

ثانيا) باشتقاق طرفي (3.3.2) بالنسبة للوسيط a ينتج :

$$f'(a) = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

وبالاشتقاق مرة ثانية ينتج :

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz$$

وهكذا نصل الى المشتق النوني :

$$\overset{(n)}{f}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

نتيجة :

اذا كان $f(z)$ تحليلياً في منطقة بسيطـــة الاتصال $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{D}}$ فان صيغة كوشي التكاملية الثانية تدل أن المشتق النوني للتابع $f(z)$ موجود في كل نقطة من $\mathcal{D}$ ومن الواضح أن وجود المشتق من المرتبة n يقتضي استمرار المشتق من المرتبة $n-1$.

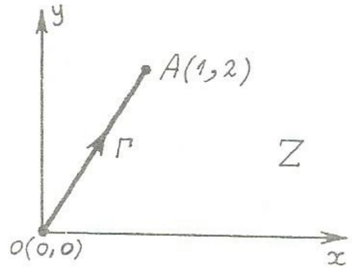
وبعبارة أخرى فان وجود المشتق الاول لتابع عقدي في منطقة بسيطة الاتصال هو شرط كاف لوجود واستمرار جميع المشتقات الاعلى مرتبة في كل نقطة داخلية من هذه المنطقة .

امثلــــــــة (٣)

مثال ٣-١-١

احسب قيمة التكامل $I=\int_{\Gamma} Z^3 dZ$ حيث Γ هو القطعة المستقيمة الواصلة من النقطة $O(0,0)$ الى النقطة $A(1,2)$.

الحـــل :



بما ان $f(Z) = Z^3$ تابـــع مستمر على المنحني المحـــدد الموجه والصقيل Γ فالتكامل موجود ويكون :

$$I = \int_{\Gamma} Z^3 dZ = \int_{\Gamma} [(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)]\, d(x+iy) =$$

$$= \int_{\Gamma} [(x^3 - 3xy^2)\, dx - (3x^2y - y^3)\, dy] +$$

$$i\int_{\Gamma} [(x^3 - 3xy^2) dy + (3x^2y - y^3)\, dx]$$

ان معادلة المستقيم OA هي $y = 2x$ ومنه $dy = 2dx$

وبتعويضهما في التكامل السابق ينتج :

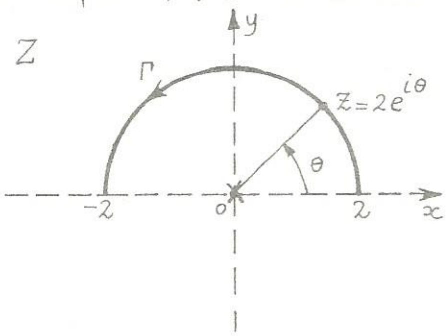
$$I = \int_0^1 (-7x^3)\, dx + i\int_0^1 (-24x^3)\, dx = -(1.75 + i6)$$

مثال ٣-١-٢

احسب قيمة التكامل $I=\int_{\Gamma} \left(Z+\frac{1}{Z}\right) dZ$ حيث Γ هو النصـــف العلوى للدائرة $|Z| = 2$ والدائرة موجهة في الاتجاه الموجب .

الحـــل :

بما ان $f(z) = z + \frac{1}{z}$ تابع مستمر على المنحنى المحدد الموجه والصقيل Γ فالتكامل موجود ، ويمكن حل هذا المثـــال بالطريقة نفسها المستخدمة في المثال ٣-١-١ أي باستخدام الشكـل الجبرى للمتحول z .



ولكن باختيار الشكل الاسي للمتحول z يسهل الحـــل لاننا نكامل على نصف دائرة .

على الدائرة المفروضةلدينا :

$$z = 2e^{i\theta}$$

ومنـــه $dz = 2i\,e^{i\theta}\,d\theta$ فيكـــون :

$$I = \int_{\Gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right) dz = \int_{0}^{\pi} \left(2e^{i\theta} + \frac{1}{2e^{i\theta}}\right) i2e^{i\theta}\, d\theta$$

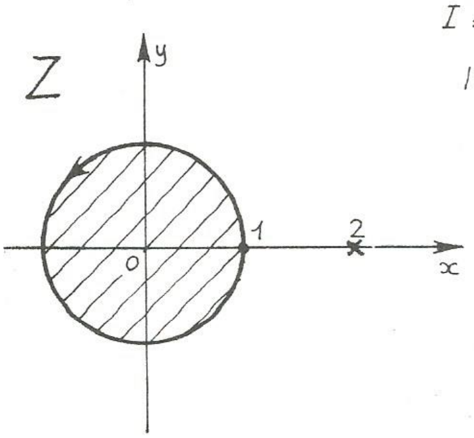
$$= i\int_{0}^{\pi} (4e^{i2\theta} + 1)\, d\theta = i\left[\frac{4e^{i2\theta}}{i2} + \theta\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \left[2e^{i2\theta} + i\theta\right]_{0}^{\pi} = \left[(2e^{i2\pi} + i\pi) - 2e^{i0}\right]$$

$$= (2 + i\pi) - 2 = i\pi$$

مثال ٣-٢-١

احسب قيمة التكامل $I = \oint_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z-2)^4}$



الحـل: ان الكسر الجبرى العادى هو تابع تحليلي $f(z) = \frac{z}{(z-2)^4}$ في المنطقة $|z| \leqslant 1$ المحاطة بالدائرة $|z| = 1$ (منحن مغلق محدد موجه وصقيل) فينتج من نظرية كوشي ان $I = 0$.

من الشكل المرافق نلاحظ ان النقطة الشاذة الوحيدة $z = 2$ للتابع تقع خارج الاطار المفروض .

مثال ٣-٢-٢

احسب قيمة التكامل $I = \int_{\Gamma} e^z \sin z\, dz$ حيث Γ هو النصف العلوى للدائرة $|z| = \frac{\pi}{2}$ والدائرة موجهة في الاتجاه الموجب .

الحـل: ان $f(z) = e^z \sin z$ تابع تحليلي دوما (لأنه جداء تابعين تحليليين دوما) ولذا فان التكامل مستقل عن المسار وبالمكاملة بالتجزئة ينتج :

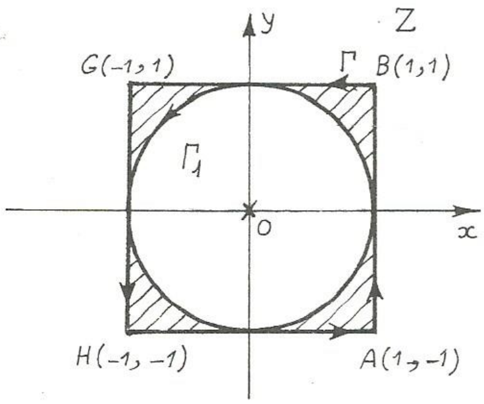
$$I = \left[\frac{e^z(-\cos z + \sin z)}{2}\right]_{z=\pi/2}^{z=-\pi/2} = -\frac{(e^{-\pi/2} + e^{\pi/2})}{2} = -ch\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

مثال ٣-٢-٣

احسب قيمة $I = \oint_{\Gamma} \frac{z+1}{z}\, dz$ حيث Γ هو الاطار المغلق $ABGHA$ المبين في الشكل المرافق .

الحــل :

ان التـابع $f(z) = \frac{z+1}{z}$ تحليلي باستثناء النقطة الشاذة $z = 0$ الواقعة داخل Γ ولـذا فلا يمكن تطبيق نظرية كوشي .
تسهيلا للحل نستبدل الاطار Γ بالاطار المكافيء Γ_1 اذ ان التـابع تحليلي بين الاطارين وعليهما .



ان التكامل على Γ_1 موجود لأنه منحن محدد موجه وصقيل والتـابع مستمر عليه . ان معادلة هذا الاطار هي $|z| = 1$ فيكـــون $z = e^{i\theta}$ عليه وينتج من ذلك ان :

$$I = \oint_{\Gamma_1} \frac{z+1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}}\right) i e^{i\theta} d\theta =$$

$$i\int_0^{2\pi} (e^{i\theta}+1)\, d\theta = i\left[\frac{e^{i\theta}}{i} + \theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$\left[e^{i\theta} + i\theta\right]_0^{2\pi} = e^{i2\pi} + i2\pi - e^{i0} = i2\pi$$

مثال ٣-٢-٤ هل $|z| = 1$, $|z| = 2$ اطاران متكافئان للتابع العقدي $w = \frac{1}{z \cos(\pi z)}$ ؟

الحــــل :

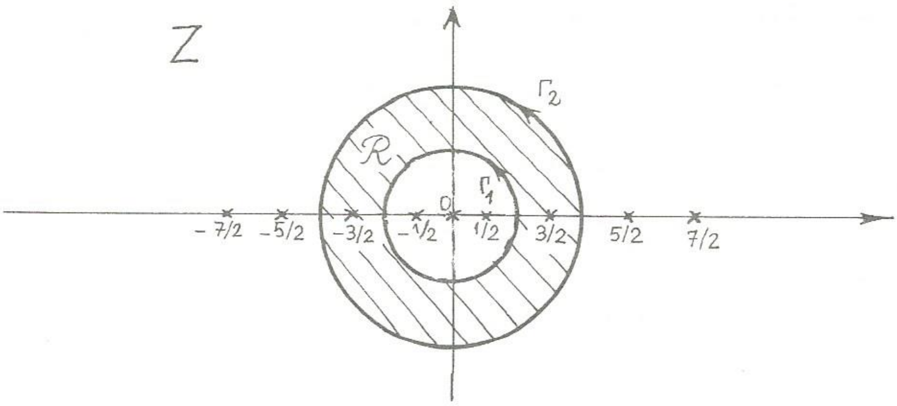
ان $w = \dfrac{1}{z\cos(\pi z)}$ هو تابع كسرى ذو صورة ومخرج تحليليــــن ونقاطه الشاذة تنتج من انعدام مخرجه وهي :

$$z = 0$$

$$z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \cdots$$

ان $|z| = 2$ و $|z| = 1$ هما الاطاران Γ_2 و Γ_1 المبينان

في الشكل المرافق وهما محددان ومقيلان (دائرتان) ومغلقان وموجهان عكس عقارب الساعة وقد حددت في الشكل النقاط الشاذة القريبة من 0 .



ان التابع تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ المحاطة بالاطارين باستثناء النقطتين الشاذتين $z = \pm \frac{3}{2}$ الواقعتين داخلها ، ولذا فالاطاران غير متكافئين لعدم تحقق احد شروط النتيجة الاولى لنظريــــة كوشــــي .

مثال ٣-٣-١

احسب قيمة التكامل $\oint_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-1)^3} dz$ في الحالتين :

آ) Γ هو الدائرة $|z-1| = 1$ ب) Γ هو الدائرة $|z| = \frac{1}{2}$

<u>الحـل :</u>

آ) للتابع $\frac{\sin z}{(z-1)^3}$ نقطة شاذة وحيدة $z = 1$ وهي تقع داخل الاطار $|z-1| = 1$ والاطار هو دائرة مركزها النقطة 1 ونصف قطرها 1 فهو محدد مغلق موجه وصقيل . كذلك فان التابع كسرى صورته $\sin z$ تحليلية دوما ومخرجه ذو حدين فتتحقق شروط صيغة كوشي التكاملية الثانية جميعها وبوضع $a = 1$, $n = 2$ فيها ينتج:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(\sin z)\Big|_{z=1}$$

$$= \pi i(-\sin 1) = -i\,2.643$$

ب) ان التابع $\frac{\sin z}{(z-1)^3}$ تحليلي في المنطقة $|z| \leq \frac{1}{2}$ المحاطة بالدائرة $z = \left|\frac{1}{2}\right|$ وهي منحن محدد مغلق موجه وصقيل فينتج من نظرية كوشي ان :

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin z}{(z-1)^3} dz = 0$$

مثال ٣-٣-٢

ناقش مستعينا بالرسم امكانية استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب المشتق النوني لكل من التوابع التالية في النطاق المبين في كل حالة :

آ) $|z-i|<1$, $w=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$

ب) $|z|<1$, $w=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

ج) $|z|<\frac{1}{2}$, $w=z-\operatorname{sh} z$

د) $|z|<\frac{1}{2}$, $w=\ln\left[z+(0.5-z^2)^{1/2}\right]$

هـ) $|z|<\frac{1}{2}$, $w=\operatorname{tg}(\pi z)$

الحـــل :

آ) لدينـــا :

$$w=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

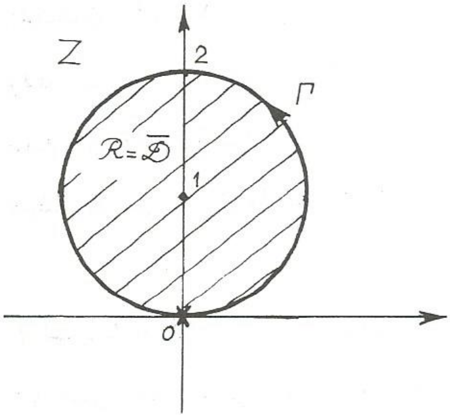
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}$$

وهو تابع كسرى جبرى عادى له نقطة شاذة وحيدة هي $z=0$

وقد رسمت في الشكل المرافق .

ان الاطار Γ هنا هو الدائرة $|z-i| = 1$ المبينة في الشكل والاطار محدد ومغلق وصقيل وموجه عكس دوران عقارب الساعة .



النطاق $\mathcal{D}$ هو $|z-i|<1$ والمنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ هي $|z-i| \leqslant 1$ وقد بينت ايضا في الشكل .

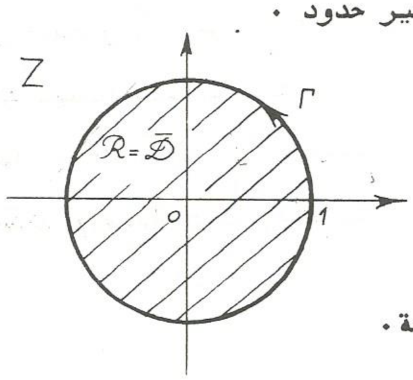
بما ان التابع w غير تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ فلا يمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب مشتقه النوني .

ب) لدينا $$w = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$= x^3 + i\,3x^2y - 3xy^2 - i\,y^3$$

$$= (x+iy)^3 = z^3$$

والتابع تحليلي دوما لانه كثير حدود .



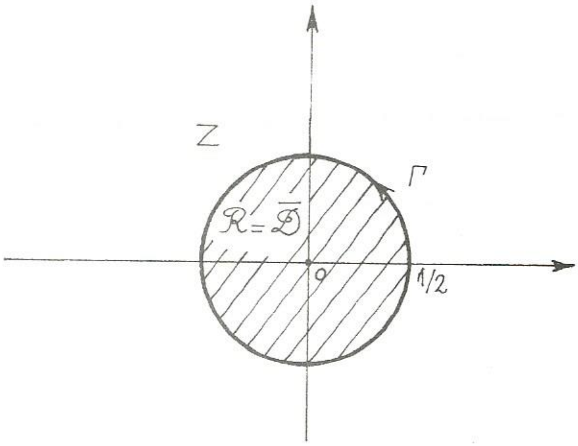
ان الاطار Γ هنا هو الدائرة $|z| = 1$ المبينة في الشكل المرافق وهو اطار محدد وصقيل ومغلق وموجه عكس دوران عقارب الساعة .

النطاق $\mathcal{D}$ هو $|z| < 1$ والمنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ هي $|z| \leqslant 1$

وقد بينت ايضا في الشكل .

بما ان التابع w تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ فيمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب مشتقه النوني .

ج) لدينا $w = z - sh\, z$ وهو تابع تحليلي دوما لأنه فرق تابعين تحليليين هما كثير حدود وجيب قطعي .



ان الاطار Γ هنا هو الدائرة $|z| = \frac{1}{2}$ المبينة في الشكل المرافق وهو اطار محدد وصقيل ومغلق وموجه عكس دوران عقارب الساعة .

ان النطاق $\mathcal{D}$ هو $|z| < \frac{1}{2}$ والمنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ هي $|z| \leqslant \frac{1}{2}$

وقد بينت ايضا في الشكل .

بما ان التابع w تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ فيمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب مشتقه النوني .

د) ان $w = \ln\left[z + (0.5 - z^2)^{1/2}\right]$ تابع لغاريتمي عام ونقاط تفرعه تنتج من وضع مضمون اللغاريتم مساويا للصفر اى ان :

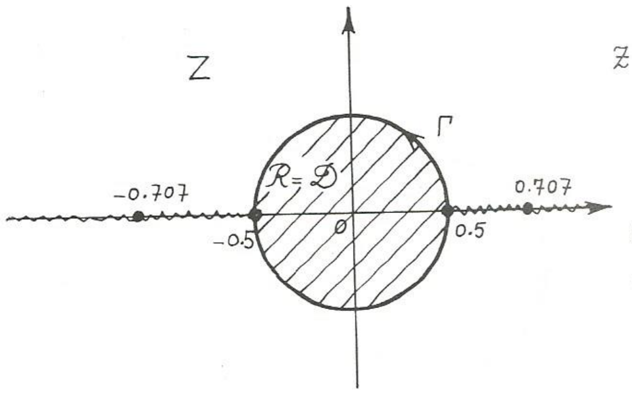
$$z + (0.5 - z^2)^{1/2} = 0$$

ومنه : $z = \pm\, 0.5$

كما انها تنتج من وضع المجذور مساويا للصفر اى ان :

$$0.5 - z^2 = 0$$

ومنه : $z = \pm\, 0.707$



وقد رسمت في الشكل المرافق نقاط التفرع الاربعة ومستقيمـــا التفرع .

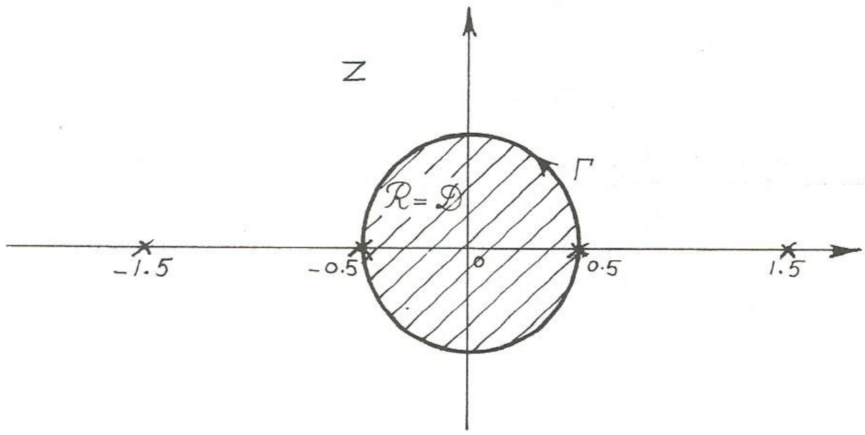
ان الشكل يبين ايضا الاطار Γ وهو الدائرة $|z| = 0.5$ كما يبين النطاق $\mathcal{D}$ وهـــو $|z| < 0.5$ والمنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ وهي $|z| \le 0.5$.

ان التابع w غير تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ لوجود نقطتي التفرع $z = \pm\, 0.5$ على محيطها فلا يمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية لحساب المشتق النوني فيها .

هـ) ان $w = tg(\pi z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ تابع كسري ذو صورة ومخرج تحليليين فهو تحليلي باستثناء النقاط الشاذة التي تعدم المخرج وهي :

$$z = k + \frac{1}{2} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

وقد رسمت في الشكل المرافق النقاط الشاذة القريبة من 0 كما رسم الاطار Γ والمنطقة $\mathcal{R}$.



ان التابع w غير تحليلي في المنطقة $\mathcal{R}$ لوجود النقطتين الشاذتين $z = \pm 0.5$ فيها ولذا فلا يمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب المشتق النوني للتابع في هذه المنطقة .

مســـــــائل (٣)

١) احسب قيمة التكامل $I = \int_{\Gamma} (z^2+3z)\, dz$ في الحالات التالية :

آ) Γ هو المستقيم الواصل من النقطة $A(2,0)$ الى النقطة $B(0,2)$ من المستوى Z .

ب) Γ هو المسار $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

جـ) Γ هو الربع الموجب للدائرة $|z|=2$ والدائرة موجهـــــة عكس عقارب الساعة .

الجواب : $-\frac{44}{3} - i\,\frac{8}{3}$

٢) ليكن Γ مربعا موجها عكس عقارب الساعة ورؤوسه هي النقاط $(0,1)$ و $(1,1)$ و $(1,0)$ و $(0,0)$.احسب قيمة ما يلي :

آ) $\oint_{\Gamma} |z|^2\, dz$ ب) $\oint_{\Gamma} sh\left(\frac{z}{z^2+4}\right) dz$

الجواب آ) $-1+i$ ب) صفر

٣) برهن على صحة ما يلي :

آ) $$\oint_{|z|=2} \frac{\sin 2z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}\, dz = -4\pi i$$

ب) $$\oint_{|z|=1} \frac{\cos^4 z}{z-\frac{\pi}{6}}\, dz = \frac{9\pi i}{8}$$

جـ) $$\oint_{|z+1-i|=2} \frac{z+4}{z^2+2z+5}\, dz = \frac{\pi}{2}(3+i2)$$

٤ ـ السلاسل العقدية

٤ ــ ١ السلاسل التابعية غير المنتهية

كما في السلاسل الحقيقية توجد سلاسل عقدية عددية وسلاسل عقدية تابعية، وهذه السلاسل يمكن أن تكون منتهية أو غير منتهية . نقتصر على دراسة السلاسل العقدية التابعية غير المنتهية ، مع العلم أن السلاسل المنتهية تكون دوماً متقاربة .

تنطبق معظم التعاريف والنظريات في السلاسل الحقيقية على العقدية بدون تعديل أو بتعديل بسيط . نورد فيما يلي أهم تعاريف وخواص ونظريات السلاسل التابعية العقدية غير المنتهية ، علماً أن برهان النظريات يتم بطريقة مشابهة لمثيلاتها في السلاسل الحقيقية .

٤ ــ ١ ــ ١ تقارب وتباعد السلسلة

نظرية : ان الشرط اللازم والكافي لكي تكون السلسلة التالية متقاربة :

$$(4.1.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[U_n(x,y) + i\, V_n(x,y) \right]$$

هو أن تتقارب كل من سلسلة الاجزاء الحقيقيـــة $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ وسلسلة الاجزاء التخيلية $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$. في هذه الحالة توجد قيمتان U , V بحيث يكون :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} U_n = U \qquad , \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} V_n = V$$

ويكون مجموع السلسلة هو :

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} F_n(z) = f(z) = U + iV$$

تعريف : اذا تقاربت السلسلة (4.1.1) لأجل جميع النقاط الواقعة في نطـاق $\mathcal{D}$ من المستوي العقدي Z فنقول إن $\mathcal{D}$ هو نطاق تقارب هذه السلسلة .

تعريف : اذا كانت احدى أو كلا النهايتين :

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} U_n \quad , \quad \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} V_n$$

غير موجودة فان السلسلة (4.1.1) تكون متباعدة .

٤ – ١ – ٢ التقارب المطلق والشرطي

تعريف : تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$ متقاربة اطلاقـاً اذا كانت سلسلة مطلقات الحدود $\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(z)|$ متقاربة .

ينتج من هذا التعريف ان السلسلة المتقاربة اطلاقاً تكون بدورها متقاربة ولكن العكس غير صحيح .

تعريف : اذا تقاربت السلسلة الاصلية وتباعدت سلسلة مطلقات الحدود ، فنقول ان التقارب شرطي .

خواصه : ان اهمية التقارب المطلق تكمن في أن السلاسل المتقاربة اطلاقاً يمكن تغيير ترتيب حدودها بأي شكل نشاء بدون أن يتغير مجموعها ، كما أن مجموع أو فرق أو جداء سلسلتين متقاربتين اطلاقاً يكون بدوره متقارباً . هـذه الخواص لا تنطبق على السلاسل المتقاربة شرطياً .

٤ - ١ - ٣ طرق اختبار التقارب

يمكن اختبار تقارب السلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(z)$ بالطرق نفسها المستخدمة في السلاسل الحقيقية وأهمها طريقة دالمبير وهي :

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} \right| = |g(z)|$$

فاذا كان $|g(z)| < 1$ فالسلسلة متقاربة .

واذا كان $|g(z)| > 1$ فالسلسلة متباعدة .

أما اذا كان $|g(z)| = 1$ فيمكن أن تتقارب السلسلة أو تتباعد ونلجأ في حالة الشك هذه الى الطرق الاخرى في اختبار التقارب .

يجب أن نلاحظ أن طريقة دالمبير تختبر التقارب المطلق للسلسلة ، وأن النطـاق $|g(z)| < 1$ هو نطاق تقارب السلسلة .

٤ - ٢ السلاسل الصحيحة

تعريفها : تدعى السلسلة العقدية التابعية غير المنتهية :

$$(4.2.1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n = A_0 + A_1 (z-a)^1 + A_2 (z-a)^2 + \ldots$$

(حيث A_n , a هما ثابتان عقديان) بسلسلة صحيحة في ($z-a$) .

تقاربها وتباعدها : حسب دالمبير تتقارب السلسلة (4.2.1) اطلاقاً اذا كان $|z-a| < b$ حيث b هو عدد حقيقي موجب معطى بالعلاقة :

$$b = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|$$

وتتباعد السلسلة إذا كان $|z-a| > b$ أي أن السلسلة (4.2.1) تتقارب في نطاق دائري مركزه النقطة a ونصف قطره b وتتباعد خارجه . أما على محيط الدائرة $|z-a| = b$ فيمكن أن تتقارب أو تتباعد . يدعى هذا النطاق الدائري بنطاق تقارب السلسلة ، ويدعى b نصف قطر تقاربها .

خواصها : يمكن اشتقاقها حداً حداً في نطاق تقاربها وللسلسلة الناتجة نصف قطر تقارب السلسلة التي اشتققناها ، كما تمكن مكاملتها حداً حداً على أي منحن مغلق يقع بكليته في نطاق التقارب . ان مجموع السلسلة الصحيحة مستمر في أية منطقة محتواة في نطاق تقاربها .

٤ - ٣ نشر تايلور

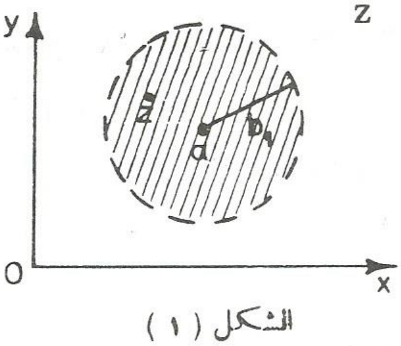
نظرية :

ليكن $f(z)$ تحليلياً في الجوار

$$|z-a| < b_1$$

للنقطة a (الشكل ١) .

يمكن نشر التابع في هذا الجوار بالقانون :



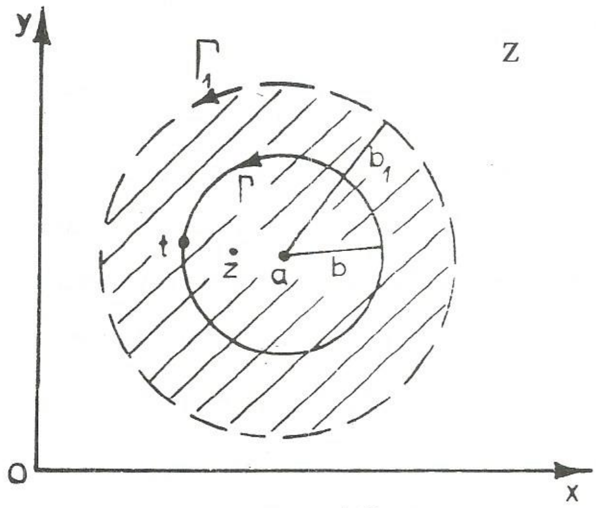
الشكل (١)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad , \quad (|z-a| < b_1)$$

والسلسلة الصحيحة الناتجة تدعى سلسلة تايلور لهذا التابع ونصف قطر تقاربها b_1 في الحالة العامة هو البعد بين النقطة a وأقرب نقطة شاذة أو أقرب مستقيم تفرع للتابع $f(z)$.

عكس النظرية :

اذا كان $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$ في الجوار $|z-a| < b_1$ للنقطة a فان التابع $f(z)$ تحليلي في هذا الجوار .



الشكل (٢)

برهان النظرية :

في الشكل (٢) ليكن Γ_1 هو المنحني $|z-a| = b_1$ وليكن Γ هو المنحني :

$$|z-a| = b < b_1$$

حيث b , b_1 هما موجبان والنقطة z تقع داخل Γ أما النقطة t فتقع على Γ .

من صيغة كوشي التكاملية الاولى ينتج :

$$(i) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

ولكن :

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)-(z-a)} = \frac{1}{(t-a)} \cdot \frac{1}{\left[1-\frac{z-a}{t-a})\right]}$$

وينتج بالقسمة العادية أن :

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-a} + \frac{z-a}{(t-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} +$$

$$\left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1} \frac{1}{[(t-a)-(z-a)]}$$

بضرب كل حد من الحدود بالتابع $\frac{1}{2\pi i} f(t)$ والمكاملة على Γ ينتج :

$$(ii) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-a} dt +$$

$$\frac{(z-a)}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^2} dt + \cdots$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}} + U_{n+1}$$

حيث :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1} \frac{f(t)}{[(t-a)-(z-a)]} dt$$

وبتعويض (i) في (i i) ينتج :

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a)^1 + A_2(z-a)^2 + \cdots +$$

$$A_n(z-a)^n + U_{n+1}$$

حيث :
$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt$$

ومن صيغة كوشي التكاملية الثانية ينتج :

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}\, dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

بقي أن نبرهن أن $\lim U_{n+1} = 0$ للحصول على المطلوب . على المنحني Γ الذي طوله $2\pi b$ لدينا من الشكل (٢) أن :

$$\frac{|z-a|}{|t-a|} = k < 1$$

وأن ؛
$$\frac{1}{|(t-a)-(z-a)|} \leqslant \frac{1}{b-|z-a|}$$

كما أن $|f(t)| \leqslant M$ حيث M هو ثابت موجب (لأن $f(t)$ مستمر) فيكون :

$$|U_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2\pi} k^{n+1} \frac{M}{b-|z-a|} 2\pi b = k^{n+1} \frac{M b}{b-|z-a|}$$

بما أن $\frac{M b}{b-|z-a|}$ ثابت و $\lim\limits_{n \to \infty} k^{n+1} = 0$ فان

$$\lim_{n \to \infty} |U_{n+1}| = 0 \qquad \text{أي أن} \qquad \lim_{n \to \infty} U_{n+1} = 0$$

برهان عكس النظرية :

اذا كان :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \qquad , \qquad (|z-a| < b_1)$$

فانه يمكن اشتقاق السلسلة حداً حداً للحصول على مشتق التابع في $|z-a| < b_1$ أي أن التابع تحليلي في هذا الجوار .

نتيجة : نشر ماك لورين :

في الحالة الخاصة من نشر تايلور التي يكون فيها $a = 0$ ينتج نشر ماك لورين للتابع $f(z)$ التحليلي في الجوار $|z| < b_1$ ويعطى بالقانون :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad , \qquad (|z| < b_1)$$

ان نشر ماك لورين لبعض التوابع الشهيرة مع شرط النشر هو :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad , \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

ولا يوجد شرط للنشر في التوابع السابقة .

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad , \quad (|z| < 1)$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad , \quad (|z| < 1)$$

$$(1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , \quad (|z| < 1)$$

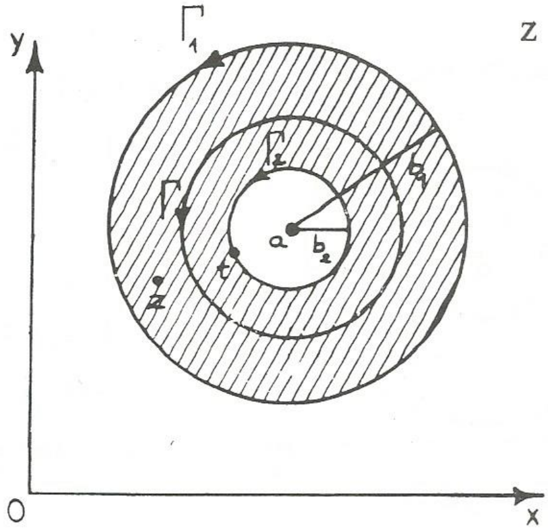
$$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad (|z| < 1)$$

$$(1-z)^{-N} = 1 + Nz + \frac{N(N+1)}{2!} z^2 + \ldots \quad , \quad (|z| < 1)$$

حيث N هو عدد صحيح أو كسري موجب .

٤ – ٤ نشر لورنت

نظرية : ليكن $f(z)$ تحليلياً في الحلقة الدائرية $b_2 \leqslant |z - a| \leqslant b_1$ المحاطة بالدائرتين Γ_1 , Γ_2 . في نقطة داخلية z من هذه الحلقة (الشكل ٣) يمكن ايجاد نشر التابع وفق القانون :



الشكل (٣)

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \quad ,$$

$$(b_2 < |z-a| < b_1)$$

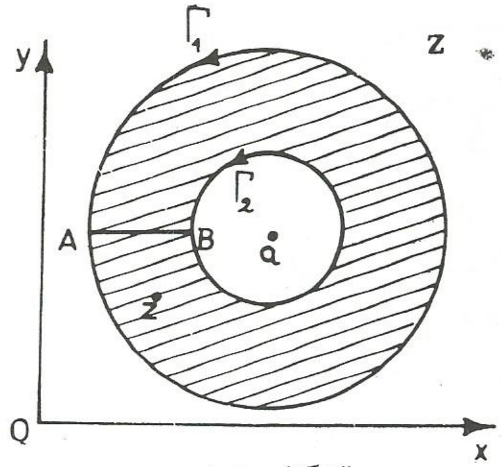
وأمثال النشر A_n , A_{-n} تعطى من القانونين :

$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{-n+1}} \quad , \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}$$

ويمكن استبدال Γ_1 , Γ_2 في هذين القانونين بالدائرة Γ (الشكل ٣) الواقعة بكليتها داخل الحلقة لأنها منحنيات متكافئة .

يدعى الجزء $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$ بالجزء التحليلي لنشر لورنت ، ويدعى الجزء الآخر بالجزء الرئيسي لهذا النشر .

ان لم يكن الجـــزء الرئيسي موجوداً فان $f(z)$ تابع تحليلي في المنطقـة الدائرية $|z-a| \leqslant b_1$ وبالعكس .



الشكل (٤)

البرهان : من صيغة كوشي التكاملية المطبقة على المنطقة بسيطة الاتصال المظللة في الشكل (٤) والناتجة من قطع الحلقـــة بالمستقيم AB ينتج :

$$(i) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

ان التكامل على المنحني Γ_1 يحسب كما رأينا في برهان نظرية تايلور فيكون :

$$(ii) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

حيث :

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{n+1}}$$

ويجب أن نلاحظ أنه لايمكن حساب A_n بدلالة المشتق النوني اذ لا يمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية الثانية في هذه الحالة ، لأن التابع $f(z)$ ليس تحليليـاً في كل نقطة من المنطقة المحاطة بالمنحني Γ_1 .

أما التكامل على المنحني Γ_2 فيتم حسابه كما يلي :

$$-\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(z-a)-(t-a)}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\left(\frac{t-a}{z-a}\right)\right]}$$

وبالقسمة العادية ينتج :

$$-\frac{1}{t-z}=\frac{1}{z-a}+\frac{t-a}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(t-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+$$

$$\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{[(z-a)-(t-a)]}$$

وبضرب كل حد من الحدود بالتابع $\frac{1}{2\pi i}f(t)$ والمكاملة على Γ_2 ينتج :

$$\text{(iii)}\qquad -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i(z-a)}\oint_{\Gamma_2}f(t)\,dt+$$

$$\frac{1}{2\pi i(z-a)^2}\oint_{\Gamma_2}(t-a)f(t)\,dt+\ldots+$$

$$\frac{1}{2\pi i(z-a)^n}\oint_{\Gamma_2}(t-a)^{n-1}f(t)\,dt+V_n$$

حيث :

$$V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\left(\frac{t-a}{z-a}\right)^n\frac{f(t)\,dt}{[(z-a)-(t-a)]}$$

بما أن $\frac{|t-a|}{|z-a|}=k<1$ على Γ_2 (الشكل ٣) فينتج بالطريقة نفسهـــا التي استخدمناها في برهان نظرية تايلور أن :

$$\lim_{n\to\infty}V_n=0$$

وان العلاقة (iii) تصبح على الشكل :

$$(iv) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{A_{-1}}{z-a} +$$

$$\frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث :
$$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)^{-n+1}}$$

وبتعويض (iv) و (ii) في (i) ينتج المطلوب .

ملاحظة :

ان ايجاد نشر لورنت لتابع مفروض داخل حلقة مفروضة باستخدام النظرية السابقة معقد ، ولكن يمكن ايجاد النشر بأية طريقة أخرى والجواب يكون نشر لورنت للتابع .

ولذا تعتبر نظرية لورنت وسيلة لاثبات وجود نشر لورنت للتابع وتستخدم في البراهين النظرية ولا تستخدم في مسائل النشر إلا نادراً .

فمثلا يكون نشر لورنت لذي الحدين التالي ، مع بيان شرط النشر هو :

$$(z - 1)^{-N} = \frac{1}{z^N} + N \frac{1}{z^{N+1}} + \frac{N (N + 1)}{2 !} \frac{1}{z^{N+2}} + \dots$$

حيث $|z| > 1$ و N هو عـــدد صحيح أو كسري موجب ونلاحظ أن الجزء التحليلي غير موجود .

يتم النشر هنا بفرض $z = 1/u$ فتصبح الحلقة المفروضة هي $1 > |u| > 0$ ويكون :

$$(z - 1)^{-N} = (1/u - 1)^{-N} = u^N (1 - u)^{-N}$$

$$= u^N [1 + N u + \frac{N (N + 1)}{2 !} u^2 + \dots]$$

$$= u^N + N u^{N+1} + \frac{N (N + 1)}{2 !} u^{N+2} + \dots$$

وذلك باستخــدام نشر ماك لورين لذي الحـــدين $(1 - u)^{-N}$. وينتج من ذلك أن :

$$(z - 1)^{-N} = \frac{1}{z^N} + N \frac{1}{z^{N+1}} + \frac{N (N + 1)}{2 !} \frac{1}{z^{N+2}} + \dots$$

٤ – ٥ أنواع النقاط الشاذة

النقاط الشاذة المنعزلة وغير المنعزلة :

تدعى النقطة الشاذة $z = a$ نقطة شاذة منعزلة للتابع $f (z)$ في نطـاق $\mathcal{D}$ اذا أمكن ايجاد $b > 0$ بحيث لا تحوي الدائرة $|z - a| = b$ الواقعة في النطاق $\mathcal{D}$ على

أية نقطة شاذة أخرى . ان لم يمكن ايجاد $b > 0$ فنقول إن $z = a$ نقطـــة شاذة غير منعزلة . نقتصر في دراستنا على النقاط الشاذة المنعزلة .

النقطة الشاذة المنعزلة التي تمكن ازالتها :

ان لم يكن $f(z)$ معرفاً في النقطة $z = a$ وان كانت النهاية $\lim_{z \to a} f(z)$ موجودة فنقول إن $z = a$ هي نقطة شاذة تمكن إزالتها ونعرف قيمة التابع عندئذ بأنها $\lim_{z \to a} f(z)$.

قبل البدء بمناقشة نوع النقطة الشاذة ، يجب التأكد من أنه لا تمكن إزالتهـا ويتم ذلك غالباً باستخدام قاعدة لوبيتال .

تصنيف النقاط الشاذة التي لاتمكن ازالتها :

ان نشر لورنت للتابع $f(z)$ في حلقة مركزها النقطة الشاذة المنعزلة التي لاتمكن ازالتها $z = a$ يمكننا من تصنيفها . فلو أخذنا في الشكل (٣) $b_2 = 0$ يكون التابع $f(z)$ تحليلياً في المنطقة المحاطة بالدائرة Γ_1 باستثناء نقطة شاذة وحيدة هي $z = a$ ويمكن ايجاد نشر لورنت للتابع لأجل $0 < |z - a| < b_1$. وفي هذه الحالة لدينا :

أولا) **القطب :** اذا كان الجزء الرئيسي لنشر لورنت مؤلفاً من عدد محدود n من الحدود أي اذا كان الجزء الرئيسي هو :

$$\frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{(z-a)}$$

فان النقطة $z = a$ هي قطب من المرتبة n .

اذا كان $n = 1$ فالقطب بسيط (أي من المرتبة الاولى) .

واذا كان $n = 2$ فالقطب مضاعف (أي من المرتبة الثانية) وهكذا .

ومنه اذا كان $z = a$ قطبا من المرتبة n فان التابع $(z-a)^n f(z)$ يصبح تحليليا في النقطة $z = a$. وبالعكس اذا كان $f(z)$ غير محدود في النقطة $z = a$ وكان n أصغر عدد صحيح موجب يجعل $(z-a)^n f(z)$ تحليليا في $z = a$ فان هذه النقطة الشاذة للتابع $f(z)$ هي قطب من المرتبة n . ينتج من ذلك أن النقاط الشاذة للكسر الجبري العادي $f(z)$ (وهي النقاط التي ينعدم فيها مخرجه) هي أقطاب فقط ، اذ لو كان $(z-a)^n$ عاملا من عوامل المخرج حيث :

$$n = 1, 2, 3, \cdots, N \quad , \quad (\text{N درجة المخروج})$$

فان $(z-a)^n f(z)$ يصبح تحليليا في النقطة $z = a$ أي أن هذه النقطة هي قطب من المرتبة n .

ثانيا) **النقطة الشاذة الاساسية** :

اذا كان الجزء الرئيسي لنشر لورنت مؤلفاً من عدد غير محدود من الحدود ، أي اذا كان الجزء الرئيسي هو :

$$\cdots + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{(z-a)}$$

فان $z = a$ هي نقطه شاذة أساسية للتابع .

امثلـــــــــــة (٤)

مثال ٤-١-١

عيّن نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n z}}{(n+1)^{3/2}}$

الحل : نستخدم طريقة دالمبير فيكون:

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i(n+1)z}/(n+2)^{3/2}}{e^{2\pi i n z}/(n+1)^{3/2}}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} \left|e^{2\pi i z}\right|$$

$$= \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} \left|e^{2\pi i(x+iy)}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} e^{-2\pi y}$$

ومنـــــــــه :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}\right| = e^{-2\pi y}$$

فاذا كان $e^{-2\pi y} < 1$ اى $y > 0$ فـــــــــان السلسلة تتقارب ومنه فان نطاق التقارب هو النصف العلـــــوى من المستوى .

مـثال ٤-٣-١

اوجد نشر التابع $Sec\ z$ بجوار الصفر حتى حد الدرجـــــــــة الرابعة مبينا شر ط النشر .

الحـــل: ان اقرب نقطة شاذة للتابع $Sec z$ عن مبدأ الاحداثيات هي $z = \frac{\pi}{2}$ او $z = -\frac{\pi}{2}$ ولذا

فان شرط النشر هو $|Z| < \frac{\pi}{2}$ والتابع تحليلي في هذا الجوار فيمكن نشره فيه وفق قانون ماك لورين . لدينا :

$$f(Z) = \operatorname{Sec} Z \quad , \quad f(0) = 1$$

$$f'(Z) = \operatorname{Sec} Z \cdot tg Z \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(Z) = \operatorname{Sec} Z \cdot tg^2 Z + \operatorname{Sec}^3 Z \quad , \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(Z) = \operatorname{Sec} Z \cdot tg^3 Z + 5 \operatorname{Sec}^3 Z \cdot tg Z \quad , \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(IV)}(Z) = \operatorname{Sec} Z \cdot tg^4 Z + 18 \operatorname{Sec}^3 Z \cdot tg^2 Z + 5 \operatorname{Sec}^5 Z , \quad f^{(IV)}(0) = 5$$

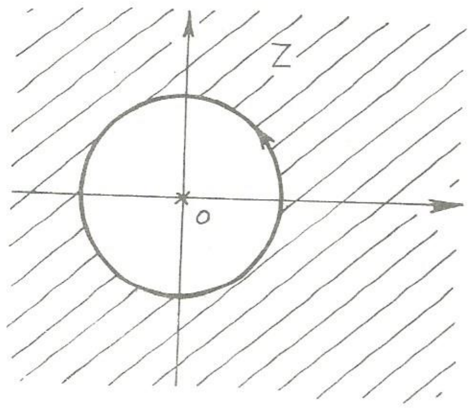
وبتعويض هذه القيم في قانون ماك لورين للنشر ينتج :

$$\operatorname{Sec} Z = 1 + \frac{Z^2}{2} + \frac{5 Z^4}{24} + \cdots\cdots$$

مثال ٤-٤-١

اوجد نشر لورنت للتابع $e^{1/Z}$ لاجل $0 < |Z| < \infty$.

الحل :



للتابع نقطة شاذة وحيدة هي $Z = 0$ والتابع تحليلي في الحلقة الدائرية المفروضة والمبينة في الشكل المرافق .

ان مركزها هو النقطة الشاذة

$z = 0$ ونصف قطرها الداخلي عدد موجب تماما بينما نصف قطرها الخارجي غير محدود ٠

بفرض $u = \frac{1}{z}$ تصبح الحلقة المفروضة هي :

$$0 < |u| < \infty$$

والتابع يصبح e^u وهو تحليلي دوما فيمكن نشره وفق قانون ماك لورين (اى بجوار الصفر) للحصول على :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots\cdots$$

وبتعويض $u = \frac{1}{z}$ نحصل على نشر لورنت المطلوب وهو :

$$e^{1/z} = \cdots\cdots + \frac{1/6}{z^3} + \frac{1/2}{z^2} + \frac{1}{z} + 1$$

ونلاحظ ان الجزء الرئيسي ذو عدد غير محدود من الحدود ٠

مثال ٤-٤-٢

اوجد نشر لورنت للتابع :

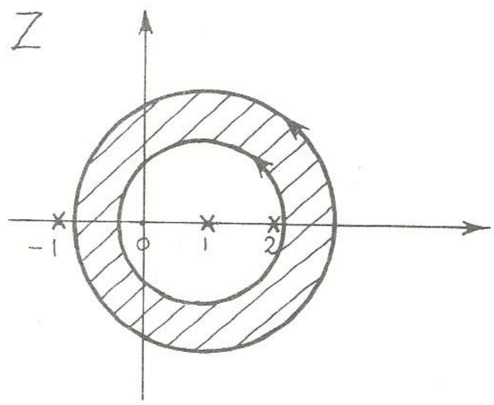
$$1 < |z-1| < 2 \quad \text{لاجل} \quad f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-2)}$$

الحل :

ان النقاط الشاذة لهذا التابع الكسرى الجبرى العادى هي قيم z التي تعدم مخرجه اى :

$$z = 1 \quad , \quad z = -1 \quad , \quad z = 2$$

والشكل المرافق يبين الحلقة المفروضـــة والتابع فيها تحليلي. لايجاد النشر المطلوب نقوم بتفريق التابـــع الى كسوره الجزئيـــة فنحصل علـــى :



$$f(Z) = -\frac{1/2}{Z-1} + \frac{1/6}{Z+1} + \frac{1/3}{Z-2}$$

لنشره حسب قوى $Z-1$ نكتب :

$$f(Z) = -\frac{1/2}{Z-1} + \frac{1/6}{(Z-1)+2} + \frac{1/3}{(Z-1)-1}$$

في الطرف الايمن نلاحظ ان الكسر الاول قد نشر حسب قوى $Z-1$ واما شرط نشر الكسر الثاني وفق قانون ذى الحـــدين هو $2 > |Z-1|$ وشرط نشر الكسر الثالث هو $1 < |Z-1|$ ولنشر التابع ضمن الحلقة المعطاة $1 < |Z-1| < 2$ يجب تغيير ترتيب الحدود في الكسر الثاني لنحصل على :

$$f(Z) = \frac{-1/2}{Z-1} + \frac{1/6}{2+(Z-1)} + \frac{1/3}{(Z-1)-1}$$

وشرط نشر الكسر الثاني يصبح $0 < |Z-1| < 2$

اما شرط نشر الكسر الثالث فيبقى $1 < |Z-1|$

والشرط المشترك هو : $1 < |Z-1| < 2$

$$f(Z) = \frac{-1/2}{Z-1} + \frac{1}{12}\left[1 + \left(\frac{Z-1}{2}\right)\right]^{-1} + \frac{1}{3}\left[(Z-1) - 1\right]^{-1}$$

$$= \frac{-1/2}{Z-1} + \frac{1}{12}\left[1 - \left(\frac{Z-1}{2}\right) + \left(\frac{Z-1}{2}\right)^2 - \cdots\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[\frac{1}{Z-1} + \frac{1}{(Z-1)^2} + \frac{1}{(Z-1)^3} + \cdots\right]$$

$$= \cdots\cdots + \frac{1/3}{(Z-1)^3} + \frac{1/3}{(Z-1)^2}$$

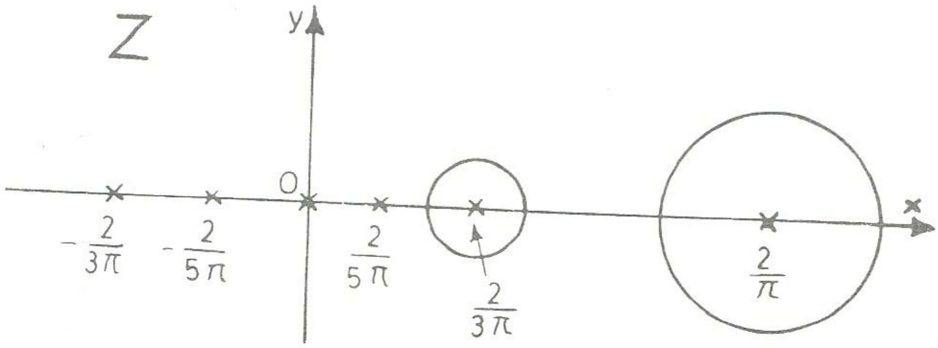
$$+ \frac{1/3 - 1/2}{Z-1} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}(Z-1)$$

$$+ \frac{1}{24}(Z-1)^2 + \cdots$$

$$f(z) = \dots + \frac{1/3}{(z-1)^3} + \frac{1/3}{(z-1)^2} - \frac{1/6}{(z-1)} + \frac{1}{12} - \frac{(z-1)}{24} + \dots$$

مثال ٤-٥-١

التابع $\cos\frac{1}{z}$ له نقطة شاذة منعزلة $z=0$ اذ انها النقطة الشاذة الوحيدة ، فتمكن احاطتها بدائرة مركزها $z=0$ ولاتحوى هذه الدائرة اية نقاط شاذة اخرى .



التابع $tg\frac{1}{z}$ له عدد غير محدود من النقاط الشاذة المنعزلة :

$$z = \pm\frac{2}{\pi}\ ,\ \pm\frac{2}{3\pi}\ ,\ \pm\frac{2}{5\pi}\ ,\ \dots\dots$$

اذ تمكن احاطة كل منها بدائرة لا تحتوى على اية نقطة شاذة اخرى ، وقد بين ذلك في الشكل المرافق .

ولكن توجد لهذا التابع نقطة شاذة غير منعزلة $z=0$ اذ لا يمكن ان تكون $z=0$ مركزا لدائرة مهما صغر قطرها بحيث لا تحتوى الدائرة على اية نقاط شاذة اخرى .

مثال ٤-٥-٢

للتابع $\frac{1-\cos Z}{Z^2}$ نقطة شاذة وحيدة $Z = 0$ تمكن ازالتها اذ ينتج من قاعدة لوبيتال ان :

$$\lim_{Z \to 0} \left(\frac{1-\cos Z}{Z^2}\right) = \lim_{Z \to 0} \left(\frac{\sin Z}{2Z}\right) = \frac{1}{2}$$

اما التابع $\frac{1-e^Z}{Z^2}$ فله نقطة شاذة وحيدة $Z = 0$ لا تمكن ازالتها اذ ينتج من قاعدة لوبيتال ان :

$$\lim_{Z \to 0} \left(\frac{1-e^Z}{Z^2}\right) = \lim_{Z \to 0} \left(\frac{-e^Z}{2Z}\right) = \infty$$

ولتعيين نوع هذه النقطة الشاذة نستخدم نشر ماك لورين للتابع e^Z فينتج :

$$\frac{1-e^Z}{Z^2} = \frac{1-\left(1+Z+\frac{Z^2}{2}+\frac{Z^3}{6}+\cdots\right)}{Z^2}$$

$$= -\frac{1}{Z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}Z - \cdots\cdots$$

أي ان نشر لورنت لهذا التابع يحوى على القوة السالبة الاولى فقط للتركيب $(Z-0)$ فالنقطة $Z=0$ هي قطب من المرتبة الاولى .

مثال ٤-٥-٣

عيّن وصنّف النقاط الشاذة للتابع $\dfrac{z}{(z^2-2z+1)(z^2-2z+2)^3}$.

الحل : ان التابع هو كسر جبرى عادى ونقاطه الشاذة (وهي قيم z التي تعدم مخرجه) اقطاب تنتج من وضع :

$$(z^2-2z+1)(z^2-2z+2)^3=0$$

أى

$$[z-1]^2[z-(1+i)]^3[z-(1-i)]^3=0$$

ومنه $z=1$ قطب من المرتبة الثانية

$z=1\pm i$ قطبان من المرتبة الثالثة

وذلك لان مرتبة كل قطب هي القوة التي ترفع اليها عوامل المخرج بعد تحليله الى عوامل من الدرجة الاولى .

مثال ٤-٥-٤

عيّن وصنّف النقاط الشاذة للتابع $e^{1/z}+\sin\dfrac{1}{z}$.

الحل : للتابع نقطة شاذة وحيدة لاتمكن ازالتها وهي $z=0$

ولتعيين نوعها نوجد نشر لورنت للتابع وهو :

$$e^{1/z}+\sin\frac{1}{z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\cdots\right)$$
$$=\cdots+\frac{1/2}{z^2}+\frac{2}{z}+1$$

وبما ان عدد القوى السالبة للتركيب $(z-0)$ غير محدود فان $z=0$ هي نقطة شاذة اساسية .

يجب ان نلاحظ ان نشر لورنت هنا ينتج من فرض $u=\dfrac{1}{z}$ واستخدام نشر ماك لورين للتابعين e^u و $\sin u$.

مثال ٤-٥-٥

عيّن وصنّف النقاط الشاذة للتوابع التالية :

آ) $w = \dfrac{e^{i2z}}{(z-1)(z^2+4)}$ ب) $w = \dfrac{z^{1/2}}{z+1}$

ج) $w = \dfrac{1}{\sin z}$ د) $w = \dfrac{1}{\sin^3 z}$

هـ) $w = \dfrac{1-e^z}{z^2 \sin z}$

<u>الحل</u> :

آ) ان $w = e^{i2z} \cdot \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ هو تابع مركب من تابعين

هما : e^{i2z} وهو تحليلي دوما

ومن $\dfrac{1}{(z-1)(z+i2)(z-i2)}$ وهو تابع كسرى جبرى عادى

نقاطه الشاذة هي الاقطاب البسيطة :

$$z = 1 \quad \text{و} \quad z = \pm i2$$

وبما ان e^{i2z} لا ينعدم فيها فتكون بدورها اقطابا بسيطة للتابع w .

ب) ان $w = z^{1/2} \cdot \dfrac{1}{z+1}$ هو تابع مركب من تابعين هما $z^{1/2}$ وهو تحليلي في المستوى Z الذى حذف منه مستقيم التفرع Ox

ومن التابع الكسري الجبري العادى $\frac{1}{z+1}$.

لهذا التابع الاخير قطب بسيط $z=-1$ فتكون النقطة الشاذة $z=-1$ للتابع w قطبا بسيطا له .

ج) ان النقاط الشاذة للتابع $w=\frac{1}{\sin z}$ هي :

$$z = k\pi \quad , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

باستخدام نشر تايلور للتابع $\sin z$ بجوار $z = k\pi$ ينتج :

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{0 + (z-k\pi)(-1)^k + 0 - \frac{(z-k\pi)^3}{6}(-1)^k + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{(-1)^k (z-k\pi)\left\{1 - \left[\frac{(z-k\pi)^2}{6} - \cdots\cdots\right]\right\}}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)}\left\{1 - \left[\frac{(z-k\pi)^2}{6} - \cdots\cdots\right]\right\}^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)}\left\{1 + \left[\frac{(z-k\pi)^2}{6} - \cdots\cdots\right] + \left[\frac{(z-k\pi)^2}{6} - \cdots\right]^2 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{(-1)^k}{z-k\pi} + \text{جزء تحليلي}$$

هذا نشر لورنت للتابع و نظرا لوجود القوة السالبة الاولى فقط لذى الحدين $(z - k\pi)$ فان النقاط الشاذة $z = k\pi$ هي اقطاب بسيطة .

د) ان $w = \frac{1}{\sin z} \cdot \frac{1}{\sin z} \cdot \frac{1}{\sin z}$ تابع مركب من ثلاثة توابع مكررة هي $\frac{1}{\sin z}$.

لقد رأينا اعلاه ان للتابع $\frac{1}{\sin z}$ اقطابا بسيطة هي $z = k\pi$ فتكون النقاط الشاذة $z = k\pi$ اقطابا من المرتبة الثالثة للتابع w .

هـ) ان $w = \frac{1 - e^z}{z^2} \cdot \frac{1}{\sin z}$ تابع مركب من تابعين هما التابع $\frac{1}{\sin z}$ واقطابه البسيطة هي $z = k\pi$ كما راينا في هذا المثال والتابع $\frac{1 - e^z}{z^2}$ وله قطب بسيط $z = 0$ كما راينا في المثال ٤ـ٥ـ٢ فتكون النقطة الشاذة $z = 0$ قطبا مضاعفا للتابع w وتكون النقاط الشاذة $z = k'\pi \ , \ k' = \pm 1, \pm 2, \dots$ اقطابا بسيطة للتابع w .

مثال ٤-٥-٦

اوجد الجزء الرئيسي لنشر لورنت للتوابع التالية في حلقة دائرية مركزها النقطة الشاذة مبينا في كل حالة نوع الشذوذ :

آ) $\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) e^{-z}$

ب) $\dfrac{z}{z e^{z} - \sin z}$

الحل :

آ) ان $\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) e^{-z} = \dfrac{(z+1)\, e^{-z}}{z^2}$

تابع كسرى ذو صورة ومخرج تحليليين وان القيمة الوحيدة التي تعدم المخرج هي $z = 0$ وبما ان الصورة لا تنعدم فيها فتكون $z = 0$ نقطة شاذة لاتمكن ازالتها .

في الحلقة الدائرية التي مركزها 0 ينتج باستخدام نشر ماك لورين للتابع e^{-z} ان :

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right) e^{-z} = \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\left(1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1-1}{z} + \text{جزء تحليلي}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \text{جزء تحليلي}$$

بما ان الجزء الرئيسي لنشر لورنت يحوي على القوة السالبة الثانية فقط لذى الحدين $(Z-0)$ فان النقطة الشاذة $Z=0$ هي قطب مضاعف .

ب) ان $\frac{Z}{Z e^{Z} - \sin Z}$ تابع كسرى ذو صورة ومخرج تحليليين وان القيمة الوحيدة التي تعدم المخرج هي $Z=0$ ولكن الصورة تنعدم فيها فينتج عدم تعيين نزيله بواسطة قاعدة لوبيتال كما يلي :

$$\lim_{Z \to 0} \frac{Z}{Z e^{Z} - \sin Z} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{Z \to 0} \frac{1}{e^{Z} + Z e^{Z} - \cos Z} = \infty$$

اذن $Z=0$ هي نقطة شاذة لا تمكن ازالتها .

باستخدام نشر ماك لورين للتابعين e^{Z} و $\sin Z$ ينتج :

$$\frac{Z}{Ze^{Z}-\sin Z}=\frac{Z}{Z\left(1+Z+\frac{Z^2}{2}+\frac{Z^3}{6}+\cdots\right)-\left(Z-\frac{Z^3}{6}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{Z}{Z^2+\frac{2}{3}Z^3+\cdots}$$

$$=\frac{1}{Z+\frac{2}{3}Z^2+\cdots}=\frac{1}{Z\left[1+\left(\frac{2}{3}Z+\cdots\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{Z}\left[1+\left(\frac{2}{3}Z+\cdots\right)\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{Z}\left[1-\left(\frac{2}{3}Z+\cdots\right)+\left(\frac{2}{3}Z+\cdots\right)^2-\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{Z}+\text{جزء تحليلي}$$

بما ان الجزء الرئيسي لنشر لورنت يحوى على القوة السالبة الاولى فقط لذى الحدين $(Z-0)$ فان النقطة الشاذة $Z=0$ هي قطب بسيط ٠

مسائل (٤)

١) عيّن نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z^n + z^{n+1})$ ، ثم احسب مجموعها .

الجواب : $|z| < 1$ و 1

٢) عيّن نطاق تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

الجواب : $|z - 1.25| > 0.75$

٣) عيّن دائرة تقارب سلاسل تايلور الناتجة من نشر التوابع التالية بجوار النقطة المبينة في كل حالة دون إيجاد النشر .

آ) $z = 2$ $\qquad f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$

ب) $z = \frac{1}{2}$ $\qquad f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$

الجواب :

آ) $|z-2| < 1$ $\qquad$ ب) $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$

٤) أوجد نشر تايلور للتابع $\cos z$ بجوار $z = \pi$ مبينا شرط النشر .

الجواب $\quad -1 + \frac{(z-\pi)^2}{2!} - \frac{(z-\pi)^4}{4!} + \frac{(z-\pi)^6}{6!} - \ldots\ldots$

والشرط $\quad |z - \pi| < \infty$

٥) عيّن جميع حالات نشر لورنت للتابع $f(Z)=\dfrac{1}{Z^2(Z-1)(Z-2)}$

في حلقة مركزها النقطة الشاذة $Z=0$ ثم اوجد هذا

النشر لاجل $0<|Z|<1$ مبينا نوع النقطة الشاذة ٠

الجواب

$$0<|Z|<1 \quad , \quad 1<|Z|<2 \quad , \quad 2<|Z|<\infty$$

$$\frac{1/2}{Z^2}+\frac{3/4}{Z}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}Z+\frac{31}{32}Z^2+\cdots\cdots$$

$Z=0$ قطب مرتبة ثانية ٠

٦) اوجد نشر لورنت للتوابع التالية في حلقة مركزها النقطة

الشاذة $Z=0$ مبينا في كل حالة نوع الشذوذ :

آ) $\dfrac{Z-\sin Z}{Z^3}$ ب) $\left(Z+\dfrac{1}{Z}\right)e^{1/Z}$

ج) $\dfrac{1}{Sh^2 Z}$ د) $\dfrac{e^{2Z}-1}{Z^4}$

الجواب :

آ) نقطة شاذة تمكن ازالتها و $\dfrac{1}{3!}-\dfrac{Z^2}{5!}+\dfrac{Z^4}{7!}-\cdots\cdots$

ب) نقطة شاذة اساسية و $Z+1+\dfrac{3/2}{Z}+\dfrac{7/6}{Z^2}+\cdots\cdots$

ج) قطب مرتبة ثانية $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15} z^2 + \cdots$

د) قطب مرتبة ثالثة $\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4/3}{z} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} z + \cdots$

٧) عيّن وصنّف جميع النقاط الشاذة للتوابع :

آ) $\sin \frac{1}{z}$ ب) $\frac{1}{\cos z}$

ج) $tg\, z$ د) $\frac{z+i}{(z^2+1)^2}$

هـ) $\frac{1}{ch\, z}$

الجواب :

آ) $z = 0$ نقطة شاذة اساسية

ب و ج) $z = k\pi$ حيث $k = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$ وكلها اقطاب بسيطة

د) $z = -i$ قطب بسيط ، $z = i$ قطب مرتبة ثانية

هـ) $z = ik\pi$ حيث $k = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$ وكلها اقطاب بسيطة

٥ ـ نظرية الرواسب

٥ ـ ١ راسب تابع في قطب أو نقطة شاذة أساسية

تعريفه :

ليكن $f(z)$ تحليلياً في المنطقة المحاطة بالدائرة Γ_1 باستثناء القطب أو النقطة الشاذة الاساسية الكائنة في مركز الدائرة $z = a$.

اذا كان b_1 نصف قطر هذه الدائرة فان نشر لورنت لهـذا التابع لأجل $0 < |z - a| < b_1$ هو :

$$f(z) = \ldots + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{(z-a)} \qquad (5.1.1)$$

$$+ A_0 + A_1 (z - a) + \ldots$$

يعرف A_{-1} بأنه راسب التابع $f(z)$ في النقطة $z = a$ ويرمزله بالرمز r_a وقيمته وفق قانون أمثال نشر لورنت هي :

$$r_a = A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t)\, dt \qquad (5 \cdot 1 \cdot 2)$$

حيث Γ دائرة مركزها $z = a$ وتقع داخل Γ_1 .

طرق حسابه :

ان ايجاد الراسب باستخدام القانون (5 . 1 . 2) معقد غالباً ، ولذا نلجأ للطرق التالية :

أولا) **طريقة النهايات** : وتستخدم عندما يكون للتابع قطب قد علمت مرتبته سلفاً (كما في حالة الكسر الجبري العادي مثلا).

اذا كان القطب من المرتبة الاولى (أي القطب بسيط) فينتـــج من (5 . 1 . 1) بالاقتصار على قوة سالبة واحدة للتركيب (z − a) أن :

$$(5.1.3) \qquad r_a = A_{-1} = \lim_{z \to a} \left[(z - a) f(z) \right]$$

أما اذا كان القطب من المرتبة n فينتج من (5 . 1 . 1) بأخذ n قوة سالبة أن :

$$(5.1.4) \qquad r_a = A_{-1} = \lim_{z \to a} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d z^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right] \right\}$$

ثانيا) **طريقة النشر المباشر** : (أي باستعمال نتائج النشر المعروفة) وتستخدم في الحالات الأخرى .

ملاحظة : ان الراسب في الحالة العامة عدد عقدي وقد يكون صفراً .

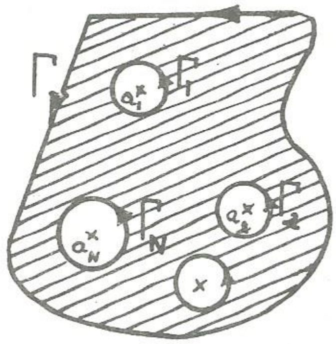
٥ — ٢ نظرية الرواسب

اذا كانت $\mathcal{R}$ منطقة محاطة بالاطار المغلق Γ وكان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في $\mathcal{R}$ باستثناء عدد محدود من الأقطاب والنقاط الشاذة الاساسية $a_1 , a_2 , \cdots , a_N$ الكائنة داخل $\mathcal{R}$ فان :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2 \pi i \left(r_{a_1} + r_{a_2} + \cdots + r_{a_N} \right)$$

حيث $r_{a_1} , r_{a_2} , \dots , r_{a_N}$ هي على الترتيب رواسب التابع في النقـــاط الشاذة $a_1 , a_2 , \dots , a_N$.

يجب أن نلاحظ أن $\mathcal{R}$ منطقة بسيطة الاتصال ، لأن Γ منحن مستمر ، كما أن نظرية كوشي هي حالة خاصة من نظرية الرواسب ، اذ لا توجد رواسب اذا كان التابع تحليلياً في كل نقطة من $\mathcal{R}$.



الشكل (١)

البرهان : نحيط كل نقطة شاذة بدائرة مركزها النقطــة الشاذة (الشكل ١) وبما أن $f(z)$ تحليلي في المنطقة المحاطة بهــذه الدوائر وبالمنحني Γ ، فينتج من النتيجــة الاولى لنظرية كوشي أن :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\Gamma_N} f(z)\,dz$$

ولكن من تعريف الراسب r_{a_1} في النقطة a_1 لدينا :

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, r_{a_1}$$

وذلك باستخدام القانون (2 . 1 . 5). نكرر استخدام هذا القانون فنحصل على :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\,(r_{a_1} + r_{a_2} + \cdots + r_{a_N})$$

٥ ــ ٣ استخدام نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية

ان حساب التكاملات الحقيقية البسيطة المحــددة التي من الصعب أو المستحيل

حسابها بطرق المكاملة المعروفة في التحليل الحقيقي يمكن أن يتم أحياناً باستخـــدام نظرية الرواسب ، وذلك باختيار تابع واطار مغلق (أي منحن مغلق) مناسبين . ان اختيارهما قد يكون معقداً ، ونورد فيما يلي أكثر الانواع شيوعاً .

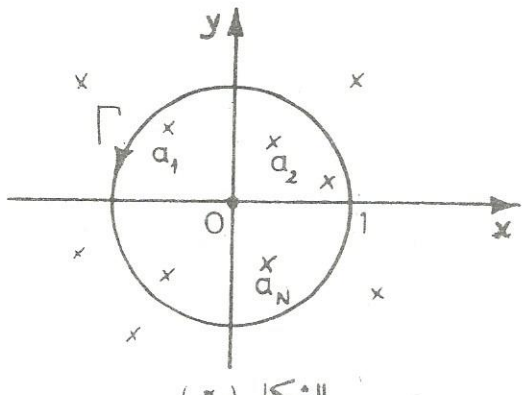
من البديهي أن الجواب النهائي يجب أن يكون حقيقياً مادمنا نحسب تكاملات حقيقية .

أولاً) حساب $I = \int_{0}^{2\pi} G(\cos\theta , \sin\theta)\, d\theta$

نظرية ١ : اذا كان $G(\cos\theta , \sin\theta)$ تابعاً كسرياً جبريـــاً عاديـــاً في $\cos\theta$, $\sin\theta$ وذا قيمة محدودة لأجل جميع قيم الزاوية θ في المجال $[0 , 2\pi]$ واذا كان $f(z)$ هو التابع العقدي الذي نحصل عليه بتعويض $z = e^{i\theta}$ فان :

$$I = 2\pi i \left(r_{a_1} + r_{a_2} + \dots + r_{a_N} \right)$$

حيث $r_{a_1} , r_{a_2} , \dots , r_{a_N}$ هي رواسب التابع $f(z)$ في أقطابه $a_1 , a_2 , \dots , a_N$ الكائنة داخل الدائرة $|z| = 1$.



الشكل (٢)

البرهان : ان الاطار Γ الذي اخترناه هنا هو الدائرة $|z| = 1$ (الشكل ٢) وعلى هذه الدائرة يكون $z = e^{i\theta}$ حيث θ تتحول من 0 الى 2π . من هذا التعويض ينتج :

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad , \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

والتابع G يصبح الكسر الجبري العادي $F(z)$ المحدود على Γ . فلدينا اذن :

$$I = \int_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{iz}$$

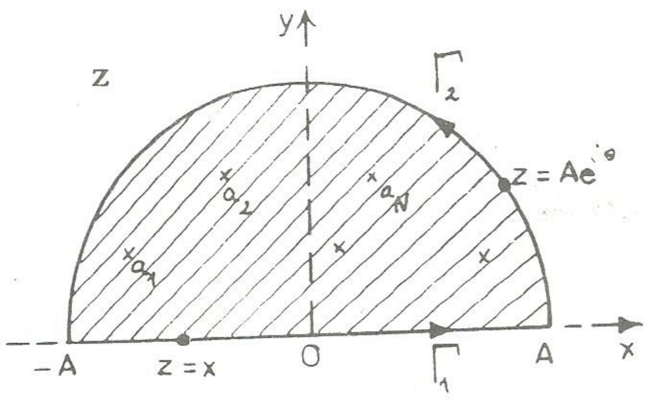
$$= \oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$

حيث $f(z) = \frac{F(z)}{iz}$ وهو كسر جبري عادي محدود على Γ ونقاطه الشاذة أقطاب فقط . بتطبيق نظرية الرواسب ينتج المطلوب .

ثانيا) حساب $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ **حيث** $f(x)$ **تابع كسري جبري عادي**

نظرية ٢ : اذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد محدود من الاقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي ، واذا كان $\lim_{z\to\infty} [z f(z)] = 0$ في المجال $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$ فان I هو ناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب التابع $f(z)$ في أقطابه الواقعة بالنصف العلوي من المستوي العقدي.

البرهان : $f(z)$ هنا هو التابع الذي نحصل عليه من استبدال x بالمتحول العقدي z . نختار الاطار $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ المبين في الشكل (٣) بحيث يحوي ضمنه جميع أقطاب التابع $f(z)$ الواقعة بالنصف العلوي من المستوي العقدي . إن Γ_2 هو نصف دائرة مركزها النقطة $z = 0$ ونصف قطرها A و Γ_1 هو القطعة المستقيمة المنطبقة على محور السينات والممتدة من A — الى A .



الشكل (٣)

اذا كانت $r_{a_N}, \ldots, r_{a_2}, r_{a_1}$ رواسب التابع $f(z)$ في أقطابه $a_N, \ldots, a_2, a_1$ الواقعة داخل Γ فينتج من نظرية الرواسب أن :

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i\,(r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_N})$$

أي أن :

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} A\,e^{i\theta}\, f(A e^{i\theta})\, i\,d\theta = 2\pi i\,(r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_N})$$

وبجعل $A \to \infty$ يكون :

$$\text{(i)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \lim_{A \to \infty} \int_{0}^{\pi} A\,e^{i\theta}\, f(A e^{i\theta})\, i\,d\theta =$$

$$2\pi i\,(r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_N})$$

ولكن فرضاً $\lim_{z \to \infty} [z f (z)] = 0$ في المجال $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

أي أن $\lim_{A \to \infty} [A e^{i \theta} f (A e^{i \theta})] = 0$.

ففي هذا المجـــال من قيم θ يكون $| A e^{i \theta} f (A e^{i \theta}) | \leqslant M$ حيث M هو عدد موجب ينتهي الى الصفر عندما $A \to \infty$ ومنه :

$$\lim_{A \to \infty} \left| \int_0^{\pi} A e^{i \theta} f (A e^{i \theta}) i \, d \theta \right| \leqslant$$

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^{\pi} | A e^{i \theta} f (A e^{i \theta}) | \, d \theta$$

$$\leqslant \lim_{A \to \infty} [M \pi] = 0$$

أي ينعدم التكامل الثاني من العلاقة (i) لانعدام طويلته وينتج المطلوب .

نتيجة : اذا حقق التابع الكسري الجبري العـــادي الحقيقي $f (x)$ الشرطين التاليين :

- درجة صورته أقل من درجة مخرجـــه بدرجتين على الاقل (بحيث يكون $\lim_{x \to \infty} [x f (x)] = 0$)

- مخرجه لا ينعدم (لكي لا توجـــد أقطاب للتابع العقدي $f (z)$ على المحور الحقيقي) فان :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f (x) \, d x = 2 \pi i (r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_N})$$

حيث $r_{a_1}, r_{a_2}, \cdots, r_{a_N}$ هي رواسب التابع العقـــدي $f(z)$ في أقطابـــه $a_1, a_2, \ldots, a_N$ الواقعة بالنصف العلوي من المستوي العقدي .

ثالثاً) حساب $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos m x . f(x) dx$, $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin m x . f(x) dx$

حيث $f(x)$ هو تابع كسري جبري عادي و $m > 0$.

نظرية ٣ : اذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً في النصف العلوي من المستوي العقدي ، باستثناء عدد محدود من الاقطاب غير الواقعة على المحور الحقيقي ، واذا كان $m > 0$ وكان $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ في المجال $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$ فان I_1 هو الجزء الحقيقي من ناتج ضرب $2\pi i$ بمجموع رواسب التابع $e^{imz} f(z)$ في أقطابه الواقعـــة في النصف العلوي من المستوي العقدي ، بينما I_2 هو الجزء التخيلي لهذا الناتج .

البرهان : ان التابع $f(z)$ والاطار Γ هما التابع والاطار نفسهما الواردين في النظريـة ٢ . اذا كانت $r_{a_1}, r_{a_2}, \cdots, r_{a_N}$ هي رواسب التابع $e^{imz} f(z)$ في أقطابه الواقعة ضمن Γ فان :

$$\oint_{\Gamma} e^{imz} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} e^{imz} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} e^{imz} f(z) dz$$

$$= 2\pi i (r_{a_1} + r_{a_2} + \cdots + r_{a_N})$$

أي أن :

$$\int_{-A}^{A} e^{imx} f(x) dx + \int_{0}^{\pi} e^{imAe^{i\theta}} f(Ae^{i\theta}) i A e^{i\theta} d\theta =$$

$$2\pi i (r_{a_1} + r_{a_2} + \ldots + r_{a_N})$$

وبجعل $A \longrightarrow \infty$ ينتج :

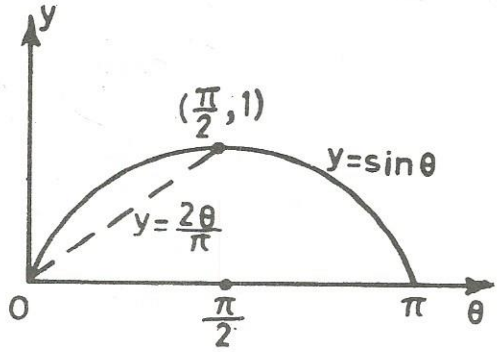
$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)\, dx + \lim_{A \to \infty} \int_0^{\pi} e^{imAe^{i\theta}} f(Ae^{i\theta}) iAe^{i\theta}\, d\theta =$$

$$2\pi i (r_{a_1} + r_{a_2} + \cdots + r_{a_N})$$

ولكن :

$$(ii) \quad |e^{imAe^{i\theta}} f(Ae^{i\theta}) iAe^{i\theta}| = Ae^{-mA\sin\theta} |f(Ae^{i\theta})|$$

ومن الشكل (٤) نرى أن :



الشكل (٤)

$\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$ عندما $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

ومنه :

$$(iii) \quad Ae^{-mA\sin\theta} \leqslant Ae^{-mA\frac{2\theta}{\pi}}$$

وبما أن $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ فرضاً فان $\lim_{A \to \infty} |f(Ae^{i\theta})| = 0$

أي أن :

$$(iv) \quad |f(Ae^{i\theta})| \leqslant M$$

حيث $M \longrightarrow 0$ عندما $A \longrightarrow \infty$ في المجال $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

باستخدام (ii) ثم (iv) ينتج :

$$\mu = \left| \int_0^{\pi} e^{i m A e^{i\theta}} f(A e^{i\theta}) \, i A e^{i\theta} \, d\theta \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} A e^{-m A \sin\theta} \left| f(A e^{i\theta}) \right| d\theta$$

$$\leqslant A M \int_0^{\pi} e^{-m A \sin\theta} d\theta = A M (2) \int_0^{\pi/2} e^{-m A \sin\theta} d\theta$$

وباستخدام (iii) يكون :

$$\mu \leqslant 2 A M \int_0^{\pi/2} e^{-m A \sin\theta} d\theta \leqslant 2 A M \int_0^{\pi/2} e^{-m A \frac{2\theta}{\pi}} d\theta =$$

$$\frac{\pi M}{m} \left[1 - e^{-m A} \right]$$

ومنه :

$$\lim_{A \to \infty} \mu = \lim_{A \to \infty} \left\{ \frac{\pi M}{m} \left[1 - e^{-m A} \right] \right\} = 0$$

اذ أن $m > 0$ فرضاً ، كما أن $M \longrightarrow 0$.

وهكذا نرى أن التكامل الثاني من العلاقة (i) ينعدم لانعدام طويلته . بمطابقة الاجزاء الحقيقية والاجزاء التخيلية من ناتج العلاقة (i) ينتج الجواب .

نتيجة : اذا حقق التابع الكسري الجبرى العادي الحقيقي $f(x)$ الشرطين التاليين :

ـ درجة صورته أقل من درجة مخرجه بدرجة واحدة على الاقل (بحيث يكون $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$)

ـ مخرجه لا ينعدم (لكي لا توجد أقطاب للتابع العقدي $e^{imz} f(z)$ على المحور الحقيقي)

واذا كان $m > 0$ فان :

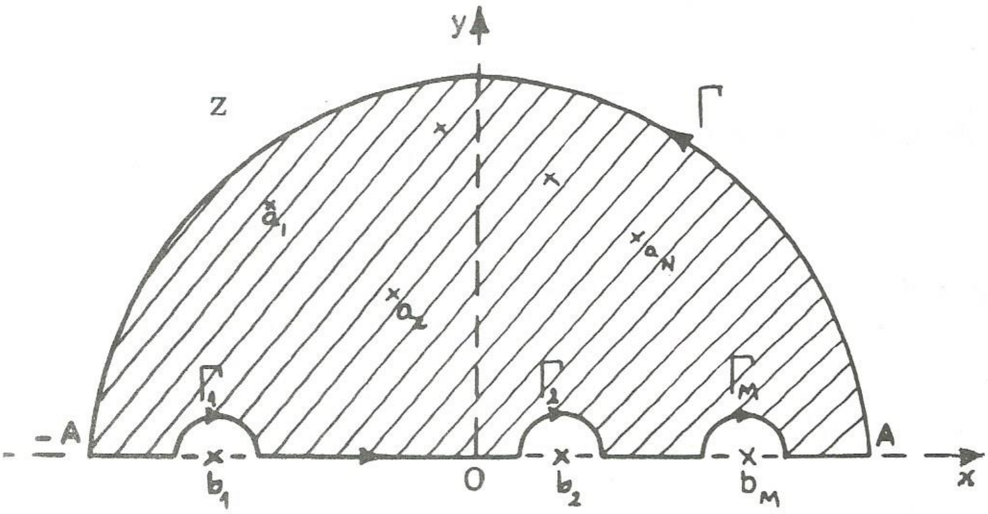
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx \,.\, f(x)\, dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left(r_{a_1} + r_{a_2} + \dots + r_{a_N} \right) \right]$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin mx \,.\, f(x)\, dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i \left(r_{a_1} + r_{a_2} + \dots + r_{a_N} \right) \right]$$

حيث $r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{a_N}$ هي رواسب التابع العقدي $e^{imz} f(z)$ في أقطابه $a_1, a_2, \dots, a_N$ الواقعة بالنصف العلوي من المستوي العقدي .

رابعاً) وجود أقطاب بسيطة على المحور الحقيقي للتابع $f(z)$ الوارد في (ثانيا) و (ثالثا) :

اذا وجدت للتابع $f(z)$ الوارد في (ثانياً) و (ثالثاً) أقطاب $a_1, \dots, a_N$ واقعة فوق المحور الحقيقي ، و كذلك أقطاب بسيطة $b_1, \dots, b_M$ واقعة على المحور الحقيقي ، فاننا نضع تسننات في الاطار Γ وهذه التسننات بشكل انصاف دوائر $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$ بحيث نتجنب الأقطاب على المحور الحقيقي وذلك كما في الشكل (٥) .



الشكل (٥)

ويجعل أقطار انصاف الدوائر $\Gamma_1 , \cdots , \Gamma_M$ تنتهي الى الصفر ويجعل $A \to \infty$ واذا كان $f(x)$ كسراً جبرياً عادياً تقل درجة صورته عن درجة مخرجه بدرجتين على الاقل فيمكن البرهان على أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \left(r_{a_1} + \dots + r_{a_N} \right) + \pi i \left(r_{b_1} + \dots + r_{b_M} \right) \qquad (5 \cdot 3 \cdot 1)$$

حيث $r_{a_1} , \cdots , r_{a_N}$ هي رواسب التابع العقدي $f(z)$ في اقطابه العلوية، بينما $r_{b_1} , \cdots , r_{b_M}$ هي رواسب هذا التابع في أقطابه البسيطة الواقعة على المحور الحقيقي.

كذلك اذا كان $f(x)$ كسراً جبرياً عادياً تقل درجة صورته عن درجة مخرجه بدرجة واحدة على الأقل فيمكن البرهان أن :

$$(5.3.2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos m x \,.\, f(x)\, dx = \\ \mathrm{Re}\left[2\pi i \left(r_{a_1} + \cdots + r_{a_N} \right) + \pi i \left(r_{b_1} + \cdots + r_{b_M} \right) \right] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin m x \,.\, f(x)\, dx = \\ \mathrm{Im}\left[2\pi i \left(r_{a_1} + \cdots + r_{a_N} \right) + \pi i \left(r_{b_1} + \cdots + r_{b_M} \right) \right] \end{cases}$$

حيث $r_{a_1}, \dots, r_{a_N}$ هي رواسب التابع العقدي $f(z)\, e^{i m z}$ في أقطابه العلوية ، بينما $r_{b_1}, \dots, r_{b_M}$ هي رواسب هذا التابع في أقطابه البسيطة الواقعة على المحور الحقيقي .

خامساً) حساب $\int_{0}^{+\infty} x^{p-1} f(x)\, dx$ حيث $f(x)$ هو تابع كسري جبري عادي و p عدد كسري :

نظرية : اذا كان $f(z)$ تحليلياً في المستوي العقدي باستثناء عـــدد محدود من الاقطاب غير الواقعة على الجزء الموجب من المحور الحقيقي واذا كان :

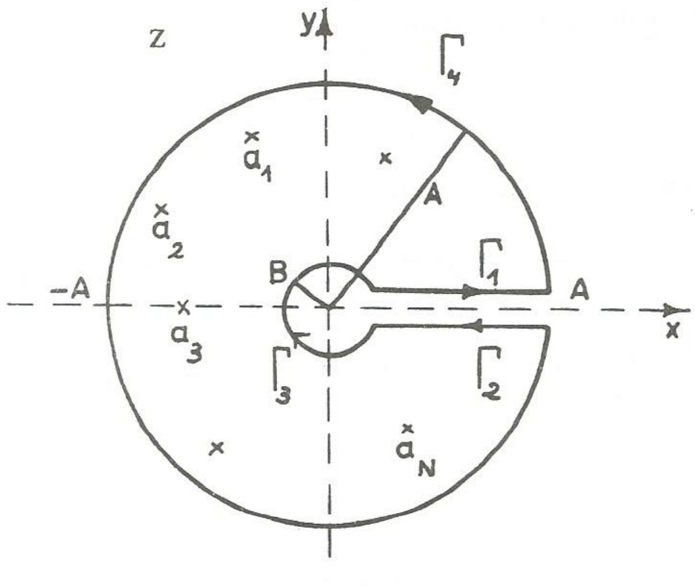
$$\lim_{z \to 0} \left[z^p f(z) \right] = 0 \quad , \quad \lim_{z \to \infty} \left[z^p f(z) \right] = 0$$

حيث $0 \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi$ فان I يساوي $-\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\, e^{-i p \pi}$ مضروباً بمجموع رواسب التابع $f(z)\, z^{p-1}$ في جميع أقطابه .

البرهان : نختار الاطار :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

المبين في الشكل (٦) حيث Γ_4 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرهـا A و Γ_3 دائرة مركزها $z = 0$ ونصف قطرها B بينما Γ_1 قطعة مستقيمة منطبقـة على محور السينات الموجبة و $z = x$ عليها و Γ_2 قطعة مستقيمة منطبقة أيضاً على محور السينات ولكن $z = x\,e^{i\,2\pi}$ عليها ، وهاتان القطعتان المستقيمتان منطبقتان على مستقيم التفرع Ox للتابع $z^{p-1}\,f(z)$ وقد رسمتا متباعدتين للتوضيح فقط ، على أن نلاحظ أن التابع معرف لأجل $0 \leqslant \arg(z) \leqslant 2\pi$ فقط ، ولذا فلا يمكن عبور مستقيم التفرع . للتابع $z^{p-1}\,f(z)$ نقطة تفرع $z = 0$ وله فرضاً أقطاب $a_1, \cdots, a_N$ غير واقعة على الجزء الموجب للمحور الحقيقي . لتكن $r_{a_1}, \cdots, r_{a_N}$ رواسب التابع $z^{p-1}\,f(z)$ في أقطابه فينتج من نظرية الرواسب أن :



الشكل (٦)

$$\oint_{\Gamma} z^{p-1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} z^{p-1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} z^{p-1} f(z)\,dz +$$

$$\int_{\Gamma_3} z^{p-1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} z^{p-1} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i\,(r_{a_1} + \ldots + r_{a_N})$$

أي أن :

$$\int_{B}^{A} x^{p-1} f(x)\,dx + \int_{A}^{B} (x e^{i2\pi})^{p-1} f(x e^{i2\pi})\,d(x e^{i2\pi}) +$$

$$I_1 - I_2 = 2\pi i\,(r_{a_1} + \ldots + r_{a_N})$$

حيث : $$I_1 = \int_{0}^{2\pi} (B e^{i\theta})^{p} f(B e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

$$I_2 = \int_{0}^{2\pi} (A e^{i\theta})^{p} f(A e^{i\theta})\, i\, d\theta$$

بجعل $A \longrightarrow \infty$, $B \longrightarrow 0$ وبما أن $I_1 \longrightarrow 0$, $I_2 \longrightarrow 0$ كما سنرى أدناه فان :

$$\int_{0}^{+\infty} x^{p-1} f(x)\,dx - e^{i2p\pi} \int_{0}^{+\infty} x^{p-1} f(x)\,dx =$$

$$2\pi i\,(r_{a_1} + \cdots + r_{a_N})$$

ومنه :

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{i2p\pi}} \left(r_{a_1} + \cdots + r_{a_N} \right)$$

حيث :

$$\frac{2\pi i}{1-e^{i2p\pi}} = -\frac{\pi}{e^{ip\pi}} \left(\frac{2i}{e^{ip\pi}-e^{-ip\pi}} \right) =$$

$$-\frac{\pi}{\sin p\pi}\, e^{-ip\pi}$$

نبرهن الآن على تناهي I_1 , I_2 الى الصفر . لدينا فرضاً أن :

$$\lim_{z \to 0} \left[z^p f(z) \right] = 0$$

أي أن :

$$\lim_{B \to 0} \left\| (B e^{i\theta})^p f(B e^{i\theta}) \right\| = 0$$

ومنه فان $\lim_{B \to 0} I_1 = 0$ لانعدام طويلته . ولدينا فرضاً أن :

$$\lim_{z \to \infty} \left[z^p f(z) \right] = 0$$

أي أن :

$$\lim_{A \to \infty} \left\| (A e^{i\theta})^p f(A e^{i\theta}) \right\| = 0$$

ومنه فان $\lim\limits_{A \to \infty} I_2 = 0$ لانعدام طويلته .

نتيجة : اذا كان p عدداً حقيقياً كسرياً ، وكان f (x) تابعاً كسرياً جبرياً حقيقياً عادياً يحقق الشروط التالية :

– $\lim\limits_{x \to 0} [x^p f (x)] = 0$

– $\lim\limits_{x \to \infty} [x^p f (x)] = 0$

– مخرجه لا ينعدم لأجل أية قيمة موجبة للمتحول x فان :

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} f (x) \, d x = - \frac{\pi}{\sin p \pi} e^{-i p \pi} (r_{a_1} + \ldots + r_{a_N}) \qquad (5 \cdot 3 \cdot 3)$$

حيث $r_{a_N} , \ldots , r_{a_1}$ هي رواسب التابع العقدي $z^{p-1} f (z)$ في جميع أقطابه .

امثلـــــة (٥)

مثال ٥-١-١

اوجد رواسب التابع $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2+1)}$.

الحـل :

ان التابع $f(z) = \dfrac{1}{(z)^3(z+i)(z-i)}$ هو كسر جبرى

عادى ذو امثال حقيقية . ان نقاط الشاذة هي اقطاب ولـه قطبان بسيطان $z = \pm i$ وقطب من المرتبة الثالثة $z = 0$. باستخدام القانون (5.1.3) ينتج ان الراسب في القطب البسيط $z = i$ هو :

$$r_i = \lim_{z \to i} \left\{ \frac{z-i}{z^3(z+i)(z-i)} \right\} = \frac{1}{2}$$

والراسب في القطب الاخر هو مرافق هذا الراسب اى $r_{-i} = \frac{1}{2}$. باستخدام القانون (5.1.4) ينتج ان الراسب في القطب الثلاثي هو :

$$r_0 = \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{z^2+1} \right] \right\} = \lim_{z \to 0} \left\{ \frac{3z^2-1}{(z^2+1)^3} \right\} = -1$$

مثال ٥-١-٢

احسب رواسب التابع $\dfrac{1}{z - \sin z}$.

الحـل : بدون النشر لانستطيع معرفة ما اذا كانت النقطة الشاذة الوحيدة $z = 0$ قطبا او نقطة شاذة اساسية ومن نشر ماك لورين للتابع $\sin z$ ينتج :

$$\frac{1}{Z-\sin Z}=\frac{1}{Z-\left(Z-\frac{Z^3}{6}+\frac{Z^5}{120}-\frac{Z^7}{5040}+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{Z^3}{6}\left(1-\frac{Z^2}{20}+\frac{Z^4}{840}-\cdots\right)}$$

$$=\frac{6}{Z^3}\left[1-\left(\frac{Z^2}{20}-\frac{Z^4}{840}\cdots\right)\right]^{-1}$$

$$=\frac{6}{Z^3}\left[1+\left(\frac{Z^2}{20}-\frac{Z^4}{840}\cdots\right)+\left(\frac{Z^2}{20}-\frac{Z^4}{840}\cdots\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{6}{Z^3}+\frac{3/10}{Z}+\text{جزء تحليلي}$$

فالنقطة الشاذة $Z=0$ هي قطب من المرتبة الثالثة وقيمة الراسب فيه $3/10$.

مثال ٥-١-٣

احسب رواسب التابع $\sin\left(\frac{1}{Z-1}\right)$.

الحل : ان النقطة الشاذة الوحيدة هي $Z=1$ ونضطر للنشر لتحديد نوعها وحساب قيمة الراسب فيها .

باستخدام نشر ماك لورين للتابع $\sin u$ حيث $u=\frac{1}{Z-1}$ ينتج :

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6(z-1)^3} + \frac{1}{120(z-1)^5} - \cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots + \frac{1/120}{(z-1)^5} - \frac{1/6}{(z-1)^3} + \frac{1}{z-1}$$

فالنقطة $z = 1$ هي نقطة شاذة اساسية وقيمةالراسب فيها 1 ٠

مثال ٥-١-٤

احسب رواسب التابع $w = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$.

الحـــل : ان $w = e^{iz} \cdot \dfrac{1}{z^2+1}$ هو تابع مركب من تابعين هما

التابع e^{iz} وهو تحليلي دوما والتابع $\dfrac{1}{z^2+1}$ وهو كسري

جبري عادي اقطابه البسيطة هي $z = \pm i$ فتكـــــون

النقطتان الشاذتان $z = \pm i$ للتابع w اقطابا بسيطة لهذا

التابع و لاحاجة للنشر هنا اذ ينتج من القانون (5 . 1 . 3)

ان الراسب في القطب البسيط $z = i$ هو :

$$r_i = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)\, e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e}$$

اما الراسب في القطب الآخر $z = -i$ فينتج بالمرافقةوهو :

$$r_{-i} = \frac{i}{2e}$$

مثال ٥-٢-١

احسب قيمة التكامل العقدي

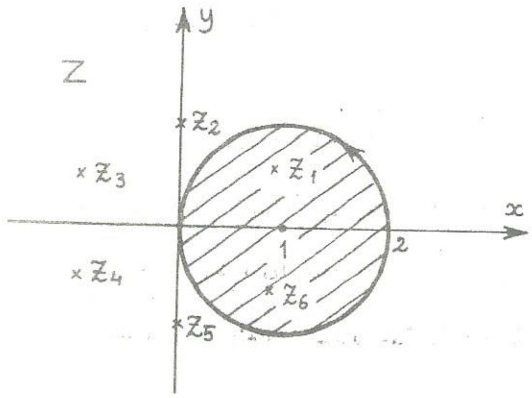
$$I = \oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^6+1}$$

الحـل :

للتابع الكسري الجبري العادي $\dfrac{1}{z^6+1}$ ستة اقطاب بسيطة هي :

$$z_1 = e^{i\pi/6} \quad , \quad z_2 = e^{i3\pi/6} \quad , \quad z_3 = e^{i5\pi/6}$$

$$z_4 = e^{i7\pi/6} \quad , \quad z_5 = e^{i9\pi/6} \quad , \quad z_6 = e^{i11\pi/6}$$



ولكن القطبين z_1 و z_6 فقط يقعان داخل الدائرة $|z-1| = 1$ كما هو مبين في الشكل ، امـا الاقطاب الاخرى فتقع خارج الدائرة وتهمل .

تحسب الرواسب هنا من القانون (5.1.3) وباستخدام قاعدة لوبيتال ينتج :

$$r_{z_1} = \lim_{z \to e^{i\pi/6}} \left[\frac{z - e^{i\pi/6}}{z^6+1}\right] = \lim_{z \to e^{i\pi/6}} \left[\frac{1}{6z^5}\right] = \frac{1}{6\, e^{i5\pi/6}}$$

$$= \frac{e^{i7\pi/6}}{6}$$

$$r_{z_6} = \lim_{z \to e^{i11\pi/6}} \left[\frac{z - e^{i11\pi/6}}{z^6 + 1} \right] = \frac{1}{6\, e^{i55\pi/6}}$$

$$= \frac{1}{6\, e^{i7\pi/6}} = \frac{e^{i5\pi/6}}{6}$$

ان الاطار المفروض هنا هو منحن محدد موجه مغلق وصقيل (لانه دائرة) والتابع تحليلي في المنطقة $|z-1| \leqslant 1$ باستثناء القطبين البسيطين z_6 و z_1 داخلها ، فتتحقق شروط نظرية الرواسب كافة وينتج منها :

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{i7\pi/6} + e^{i5\pi/6}}{6} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{6} \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6} \right)$$

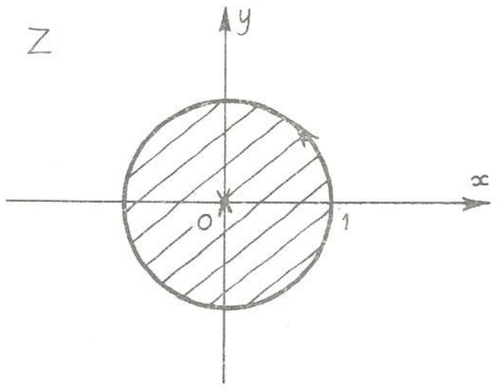
$$= \frac{\pi i}{3} \left(-\cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{3} \left(-2 \cos\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi i}{3} \left(-2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-\pi i}{\sqrt{3}}$$

مثال ص-٢-٦

احسب قيمة التكامل العقدي $I = \oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z} \right) ch\left(\frac{1}{z} \right) dz$.

الحـــل :



للتابع نقطة شاذة وحيدة لا تمكن ازالتها هي $Z = 0$ وهي تقع داخل الاطار $|Z| = 1$ المبين في الشكل المرافق ٠ نوجد نشر لورنت للتابع في حلقة دائرية مركزها $Z = 0$ فيكون :

$$\left(Z + \frac{1}{Z}\right) ch\left(\frac{1}{Z}\right) = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)\left(1 + \frac{1}{2Z^2} + \frac{1}{24Z^4} + \cdots\right)$$

$$= \cdots + \frac{13/24}{Z^3} + \frac{3/2}{Z} + Z$$

اذن $Z = 0$ نقطة شاذة اساسية وقيمة الراسب فيها $\frac{3}{2}$ ٠

باستخدام نظرية الرواسب ونظرا لتحقق شروطها كافة ينتج :

$$I = 2\pi i\left(\frac{3}{2}\right) = i3\pi$$

مثال ٥-٢-٣

احسب قيمة التكامل العقدي
$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dZ}{\frac{1}{2} - \sin^2\left(\frac{Z}{2}\right)}$$

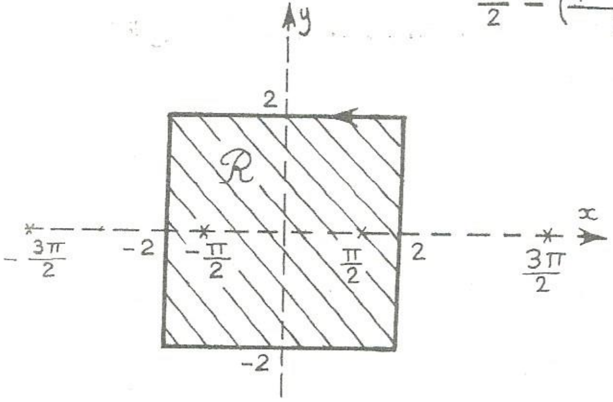
حيث Γ هو مربع

رؤوسه النقاط $2 \pm i2$ و $-2 \pm i2$.

الحل :

للتابع
$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1-\cos z}{2}\right)} = \frac{2}{\cos z}$$



نقاط شاذة $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$ ولكن توجد اثنتان فقط داخل المربع هما $z = \pm \pi/2$ ، اما النقاط الشاذة الاخرى فتهمل لوقوعها خارج الاطار كما هو مبين في الشكل .

لحساب الراسب في $z = \frac{\pi}{2}$ ننشر المخرج وفق تايلور لنحصل على:

$$\frac{2}{\cos z} = \frac{2}{-\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{120}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5 + \cdots}$$

$$= -\frac{2}{z-\frac{\pi}{2}}\left\{1 - \left[\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \cdots\right]\right\}^{-1}$$

$$= -\frac{2}{z-\frac{\pi}{2}}\left\{1 + \left[\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{120} + \cdots\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{6} - \cdots\right]^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{2}{\cos Z} = -\frac{2}{Z - \pi/2} + \text{جزء تحليلي}$$

اى ان قيمة الراسب في القطب البسيط $Z = \frac{\pi}{2}$ هي -2 .

لحساب الراسب في $Z = -\frac{\pi}{2}$ ننشر المخرج وفق تايلورفنحصل على :

$$\frac{2}{\cos Z} = \frac{2}{(Z+\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(Z+\frac{\pi}{2})^3 + \frac{1}{120}(Z+\frac{\pi}{2})^5 - \dots\dots}$$

$$= \frac{2}{Z+\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \left[\frac{(Z+\frac{\pi}{2})^2}{6} - \frac{(Z+\frac{\pi}{2})^4}{120} + \dots \right] \right\}^{-1}$$

$$= \frac{2}{Z+\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 + \left[\frac{(Z+\frac{\pi}{2})^2}{6} - \dots\dots \right] + \left[\frac{(Z+\frac{\pi}{2})^2}{6} - \dots \right]^2 + \dots \right\}$$

$$= \frac{2}{Z + \pi/2} + \text{جزء تحليلي}$$

اى ان قيمة الراسب في القطب البسيط $Z = -\frac{\pi}{2}$ هي 2 .

ان الاطار والتابع يحققان شروط نظرية الرواسب لان الاطار منحنى محدد مغلق موجه صقيل جزئيا (لانه مربع) يحيط بمنطقة $\mathcal{R}$ والتابع تحليلي في $\mathcal{R}$ باستثناء القطبين البسيطين $Z = \pm\frac{\pi}{2}$ داخلها وينتج :

$$I = 2\pi i(-2+2) = 0$$

وتجدر الملاحظة ان التكامل ينعدم رغم ان للتابع نقاطا شاذة داخل الاطار .

مثال ٥-٣-١

احسب التكامل الحقيقي

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

الحـل :

ان التابع $G = \dfrac{2\cos^2\theta - 1}{5-4\cos\theta}$ يحقق شروط النظريـة

(١) لانه كسر جبري عادي في $\cos\theta$ ومخرجه لا ينعدم .

بالانتقال الى المتحول العقدي $z = e^{i\theta}$ يكون :

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 - 1}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{2\,\frac{(z^2+1)^2}{4z^2} - 1}{5-4\,\frac{(z^2+1)}{2z}} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^2 - 2z^2}{2z^2\left[5 - 2\frac{(z^2+1)}{z}\right]} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= -\frac{1}{i4} \oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z^2-2.5z+1)}\, dz$$

للكسر الجبري العادي $\frac{Z^4+1}{Z^2(Z^2-2.5Z+1)}$ ثلاثة اقطاب هي:

$Z=0$ قطب مضاعف يقع داخل الاطار فيحسب الراسب فيه من القانون $(5.1.4)$ ، $Z=0.5$ قطب بسيط يقع داخل الاطار فيحسب من القانون $(5.1.3)$ ، $Z=2$ قطب بسيط يقع خارج الاطار ويهمل .

$$r_0 = \lim_{Z\to 0}\left[\frac{d}{dZ}\left(\frac{Z^4+1}{Z^2-2.5Z+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{Z\to 0}\left[\frac{4Z^3(Z^2-2.5Z+1)-(2Z-2.5)(Z^4+1)}{(Z^2-2.5Z+1)^2}\right] = \frac{5}{2}$$

$$r_{0.5} = \lim_{Z\to 0.5}\left[\frac{(Z-0.5)(Z^4+1)}{Z^2(Z-0.5)(Z-2)}\right] = \frac{-17}{6}$$

وحسب النظرية (١) يكون :

$$I = 2\pi i\left[-\frac{1}{i4}\left(\frac{5}{2}-\frac{17}{6}\right)\right] = \frac{\pi}{6}$$

مثال ص-٣-٢

احسب قيمة التكامل الحقيقي $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

الحـــل :

ان التـابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$ يحقق الشرطيـــن الواردين في نتيجة النظرية (٢) وهما ان درجة الصورة اقـل من درجة المخرج بأربع درجات (وتكفي درجتان)كما ان المخرج لا ينعدم ولذا فاننا نوجد رواسب التابع العقـــــــــــــدي $f(z) = \frac{1}{z^4+z^2+1}$ في اقطابه الواقعة في النصف العلوى من المستوى العقدى ٠

لهذا التابع اربعة اقطاب بسيطة هي :

$$z_1 = e^{i\pi/3} \quad , \quad z_2 = e^{i2\pi/3}$$

$$z_3 = e^{i4\pi/3} \quad , \quad z_4 = e^{i5\pi/3}$$

ولكن القطبين z_2 و z_1 فقط يقعان في النصف العلوي مـــن المستوى العقدي ٠ نحسب الراسبين فيهما باستخدام القانون $(5 \cdot 1 \cdot 3)$ وقاعدة لوبيتال للحصول على :

$$r_{z_1} = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left[\frac{z - e^{i\pi/3}}{z^4+z^2+1} \right] = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left[\frac{1}{4z^3+2z} \right]$$

$$= \frac{1}{4e^{i\pi}+2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{-(3+i\sqrt{3})}{12}$$

$$r_{z_2}=\lim_{z\to e^{i2\pi/3}}\left[\frac{z-e^{i2\pi/3}}{z^4+z^2+1}\right]=\lim_{z\to e^{i2\pi/3}}\left[\frac{1}{4z^3+2z}\right]$$

$$=\frac{1}{4e^{i2\pi}+2e^{i2\pi/3}}=\frac{1}{3+i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{12}$$

ومن نتيجة النظرية (٢) يكون :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=2\pi i\left[\frac{-3-i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{12}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

ملاحظة : بما ان $f(x)=\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$ تابع زوجي فان :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

مثال ٥-٣-٣

احسب قيمة التكامل الحقيقي $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

الحـل :

ان التابع الحقيقي $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ يحقق الشرطين الواردين في نتيجة النظرية (٢) وهما ان درجة الصورة اقل من درجة المخرج بست درجات (وتكفي درجتان) كما ان المخرج لا ينعدم لذلك نوجد رواسب التابع :

في اقطابه الواقعة في النصف $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$

العلوى من المستوى العقدى . لهذا التابع الكسرى الجبرى

العادى قطبان :

$$z_1 = i \qquad , \qquad z_2 = -i$$

ولكن القطب $z_1 = i$ فقط يقع في النصف العلوى من المستوى

Z . نحسب الراسب فيه باستخدام القانون $(5.1.4)$

فينتج :

$$r_i = \lim_{z \to i} \left\{ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{(z-i)^3 \cdot 1}{(z-i)^3 (z+i)^3} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z \to i} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{(z+i)^5} \right\} = \frac{3}{16\, i}$$

وباستخدام نتيجة النظرية (٢) يكون :

$$I = 2\pi i \left(\frac{3}{16\, i} \right) = \frac{3}{8}\, \pi$$

مثال ٥-٣-٤

اذا كان $a > b > 0$ فاحسب قيمة التكاملين الحقيقيين :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \qquad , \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

الحـل :

ان التـابع الحقيقي $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ يحقـــق

الشرطين الواردين في نتيجة النظرية (٣) وهي ان درجة الصورة تقل عن درجة المخرج بأربع درجات (وتكفي درجة واحدة) كما ان المخرج لا ينعدم ولذا فاننا نوجد رواسب التابع العقـــدى

$\dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ في اقطابه الواقعة في النصف العلوى من المستوى العقدى .

لهذا التابع قطبان بسيطان $z = ia$, $z = ib$ واقعان في النصف العلوى ، اما القطبان الآخران $z=-ia$, $z=-ib$ فيقعان في النصف السفلي ونهملهما .

ان الرواسب تحسب من القانون $(5.1.3)$ فينتج :

$$r_{ia} = \lim_{z \to ia} \left[\frac{(z-ia)\, e^{iz}}{(z-ia)(z+ia)(z^2+b^2)} \right]$$

$$= \frac{e^{-a}}{i2a(b^2-a^2)}$$

$$r_{ib} = \lim_{z \to ib} \left[\frac{(z-ib)\, e^{iz}}{(z-ib)(z+ib)(z^2+a^2)} \right]$$

$$= \frac{e^{-b}}{i2b(a^2-b^2)}$$

ومن نتيجة النظرية (٣) يكون :

$$I_1 = R_e \left\{ 2\pi i \left[\frac{e^{-a}}{i2a(b^2 - a^2)} + \frac{e^{-b}}{i2b(a^2 - b^2)} \right] \right\}$$

$$= \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b e^b} - \frac{1}{a e^a} \right)$$

$$I_2 = I_m \left\{ 2\pi i \left[\frac{e^{-a}}{i2a(b^2 - a^2)} + \frac{e^{-b}}{i2b(a^2 - b^2)} \right] \right\} = 0$$

ملاحظة :

ان $I_2 = 0$ دون الحاجة الى اجراء المكاملة ، لان

$\frac{\sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ تابع فردي في المجال المفروض .

كذلك يمكن ان نستنتج ان :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{2} I_1$$

$$= \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} \left(\frac{1}{b e^b} - \frac{1}{a e^a} \right)$$

وذلك لان $\frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ تابع زوجي في المجال

$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

مثال ٥-٣-٥

احسب قيمة التكامل الحقيقي

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)^2}$$

<u>الحل :</u>

ان التابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ يحقق الشرطين الواردين في نتيجة النظرية (٣) وهي ان درجة الصورة تقل عن درجة المخرج بأربع درجات (وتكفي درجة واحدة) كما ان المخرج لا ينعدم ولذا فاننا نوجد رواسب التابع العقدى $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ في اقطابه الواقعة في النصف العلوى من المستوى العقدى .

للتابع قطبان مضاعفان هما $z_1 = i \; , \; z_2 = -i$ ولكن z_1 فقط يقع في النصف العلوى ونهمل القطب الآخر z_2 .

ان الراسب يحسب من القانون $(5.1.4)$ فينتج :

$$r_i = \lim_{z \to i} \left\{ \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-i)^2 e^{iz}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right] \right\}$$

$$= \lim_{z \to i} \left\{ \frac{i e^{iz} (z+i)^2 - 2(z+i) e^{iz}}{(z+i)^4} \right\}$$

$$= \frac{i e^{-1}(-4) - 4 i e^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}$$

ومن نتيجة النظرية (٣) يكون :

$$I = Re\left\{ 2\pi i \left(-\frac{i}{2e} \right) \right\} = \frac{\pi}{e}$$

مثال ٥-٣-٦

احسب قيمة التكامل الحقيقي

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x(1+x^2)}\, dx$$

الحـل :

ان التابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ يحقق الشـروط المطلوبة لتطبيق القانون (5.3.2) الوارد في (رابعا) اذ انه كسر جبري عادي درجة بسطه تقل عن درجة مخرجه بثـلاث درجات (وتكفي درجة واحدة) كما ان مخرجه ينعدم في جـذر بسيط $x = 0$.

لذا نحسب رواسب التابع العقدي $\frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)}$ في قطبه العلوي البسيط $z = i$ وفي قطبه البسيط $z = 0$ الواقع على المحور الحقيقي ونهمل القطب $z = -i$ لوقوعه فـي النصف السفلي من المستوى العقدي .

باستخدام القانون (5.1.3) ينتج الراسبان وهما :

$$r_0 = \lim_{z \to 0} \left[\frac{z\, e^{i3z}}{z(1+z^2)} \right] = 1$$

$$r_i = \lim_{z \to i} \left[\frac{(z-i)\, e^{i3z}}{z(z-i)(z+i)} \right] = -\frac{1}{2e^3}$$

وحسب القانون (5.3.2) يكون :

$$I = I_m \left\{ 2\pi i \left(-\frac{1}{2e^3} \right) + \pi i (1) \right\} = \pi \left(1 - \frac{1}{e^3} \right)$$

مثال ٥-٣-٧

احسب قيمة التكامل الحقيقي

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

الحل :

ان التابع الحقيقي $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$ يحقق الشروط المطلوبة لتطبيق القانون (5.3.1) الوارد في (رابعا) اذ انه كسر جبرى عادى درجة صورته تقل عن درجة مخرجه بثلاث درجات (وتكفي درجتان) كما ان مخرجه ينعدم في جذر بسيط $x = -1$ ،

نحسب رواسب التابع العقدى $\frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{1}{z^3+1}$

في قطبه العلوى البسيط $z = e^{i\pi/3}$ وفي قطبه البسيط

$z = -1$ الواقع على المحور الحقيقي ونهمل القطب

$z = e^{i5\pi/3}$ لوقوعه في النصف السفلي من المستوى Z .

نوجد الراسبين من القانون (5.1.3) فينتج :

$$r_{e^{i\pi/3}} = \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left[\frac{z - e^{i\pi/3}}{z^3+1} \right] = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{z \to e^{i\pi/3}} \left[\frac{1}{3z^2} \right] = \frac{1}{3e^{i2\pi/3}}$$

$$= \frac{1}{3(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{6}$$

$$r_{-1} = \lim_{z \to -1} \left[\frac{(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} \right] = \frac{1}{3}$$

وحسب القانون (5.3.1) يكون :

$$I = 2\pi i \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{6} \right) + \pi i \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} .$$

مثال ٥-٣-٨

اذا كان $0 < P < 2$ فاحسب قيمة التكامل الحقيقي

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{P-1}}{1+x^2}\, dx$$

الحل :

ان التابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يحقق الشروط المطلوبة لتطبيق القانون $(5.3.3)$ الوارد في نتيجة (خامسا) اذ انه كسر جبرى عادى يكون فيه :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^P}{1+x^2} = 0 \quad \text{عندما} \quad P > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^P}{1+x^2} = 0 \quad \text{عندما} \quad P < 2$$

اى ان هذين الشرطين محققان معا لان $0 < P < 2$ فرضا .

كذلك فان الشرط الثالث محقق وهو عدم انعدام مخرج الكسر لاجل اية قيمة موجبة للمتحول x .

لذا نحسب رواسب التابع العقدى $\frac{Z^{P-1}}{1+Z^2}$ في قطبيه البسيطين $Z = \pm i$ فيكون :

$$r_i = \lim_{Z \to i} \left[\frac{(Z-i)\, Z^{P-1}}{(Z-i)(Z+i)} \right] = \frac{(i)^{P-1}}{i2} = -\frac{(i)^P}{2}$$

$$= \frac{-(e^{i\pi/2})^P}{2} = \frac{-e^{ip\pi/2}}{2}$$

$$r_{-i} = \lim_{z \to -i} \left[\frac{(z+i)\, z^{p-1}}{(z+i)(z-i)} \right] = \frac{(-i)^{p-1}}{-i2} = -\frac{(-i)^{p}}{2}$$

$$= \frac{-\left(e^{i3\pi/2} \right)^{p}}{2} = -\frac{e^{i3p\pi/2}}{2}$$

وذلك لان $i = e^{i\pi/2}$, $-i = e^{i3\pi/2}$ بالقيمة الاساسية .

حسب القانون المذكور يكون :

$$I = -\frac{\pi}{\sin(p\pi)} e^{-ip\pi} \left(-\frac{e^{ip\pi/2}}{2} - \frac{e^{i3p\pi/2}}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sin(p\pi)} \left(e^{-ip\pi/2} + e^{ip\pi/2} \right) = \frac{\pi}{2\sin p\pi} 2\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}$$

مثال ٥-٣-٩

احسب قيمة التكامل الحقيقي :

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{x^{-1/4}}{x+1} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

بفرض $\int_0 \frac{[illegible]}{x}\, dx$ [illegible]

يكون $I = I_1 + I_2$.

يتم حساب I_1 من نتيجة (خامسا) لان $P-1 = -\frac{1}{4}$ اى $P = \frac{3}{4}$

وان التابع الحقيقي $f(x) = \frac{1}{x+1}$ المعطى في I_1

يحقق الشروط المطلوبة لتطبيق القانون (5.3.3) الوارد في

النتيجة المذكورة لان :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{3/4}}{x+1} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^{3/4}}{x+1} = 0$$

كما ان الشرط الثالث محقق هنا لان المخرج لا ينعدم في قيمة

موجبة للمتحول x .

لذا نحسب رواسب التابع العقدى $\frac{z^{-1/4}}{z+1}$ في قطبه البسيط

$z = -1$ فيكون :

$$r_1 = \lim_{z \to -1} \frac{(z+1)\, z^{-1/4}}{(z+1)} [illegible]$$

$$= \left(e^{i\pi} \right)^{-1/4} = e^{-i\pi/4}$$

وذلك لان $e^{i\pi} = -1$ [illegible] يكون

$$I_1 = -\frac{\pi}{\sin(\frac{3\pi}{4})} e^{-i3\pi/4} \left(e^{-i\pi/4} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{\sin(\frac{3\pi}{4})} e^{-i\pi} = \pi\sqrt{2}$$

اما لحساب التكامل I_2 فنلاحظ ان $\frac{\sin x}{x}$ تابع زوجي في المجال $-\infty \leq x \leq +\infty$ ومنه $I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

اى انه لحسابه نستخدم القانون $(5 . 3 . 2)$ الوارد في (رابعا) لان $f(x) = \frac{1}{x}$ هو كسر جبرى عادى تقل درجة صورته عن درجة مخرجه بدرجة واحدة (وهذا يكفي) كما ان مخرجه ينعدم في جذر بسيط فيوجد للتابع العقدى $\frac{e^{iz}}{z}$ قطب بسيط $z = 0$ واقع على المحور الحقيقي . الراسب فيه هو :

$$r_0 = \lim_{z \to 0} \left[\frac{z\, e^{iz}}{z} \right] = 1$$

وحسب القانون المذكور فان :

$$I_2 = \frac{1}{2} I_m \left[\pi i (1) \right] = \frac{\pi}{2}$$

و عليه فان :

$$I = \pi\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

مســـــــــائل (٥)

١) في التوابع التالية بيّن نوع كل نقطة شاذة واحسب الراسب فيها :

آ) $\dfrac{Z^2}{Z^4+16}$ ب) $\dfrac{Z\,e^Z}{Z^4-Z^2}$

جـ) $\dfrac{1}{(Z+1)^2}$ د) $\dfrac{1-\cos 2Z}{Z^3}$

هـ) $\cot Z$ و) $\dfrac{1}{\sin Z \cdot \operatorname{sh} Z}$

الاجوبة :

آ) اقطاب بسيطة $2e^{i\pi/4}\,,\ 2e^{i3\pi/4}\,,\ 2e^{i5\pi/4}\,,\ 2e^{i7\pi/4}$

والرواسب فيها $\dfrac{1\mp i}{8\sqrt{2}}\,,\ \dfrac{-1\pm i}{8\sqrt{2}}$

ب) اقطاب بسيطة $0\,,\ 1\,,\ -1$

والرواسب فيها $-1\,,\ \dfrac{e}{2}\,,\ \dfrac{1}{2e}$

جـ) قطب مضاعف -1 والراسب فيه صفر ٠

د) قطب بسيط $Z = 0$ والراسب فيه 2

هـ) اقطاب بسيطة $Z = k\pi$ حيث $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

والراسب في كل منها هو 1 .

و) قطب مرتبة ثانية $Z = 0$ والراسب فيه صفر .

واقطاب بسيطة $Z = k\pi$ والراسب في كل منهاهو $\dfrac{(-1)^k}{sh\, k\pi}$

واقطاب بسيطة $Z = ik\pi$ والراسب في كل منهاهو $\dfrac{(-1)^k}{i\, sh\, k\pi}$

حيث $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

٢) برهن ما يلي مستعينا بالرسم وبعد التأكد من تحقق شـــروط استخدام نظرية الرواسب :

آ)

ب)
$$\oint_{|Z|=1} \frac{e - 1}{Z^2 \sin^2 Z}\, dZ = \pi i$$

ج)

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{Z^2 - 4Z + 2}{Z e^{1/Z}} \right) dZ = i\, 13\pi$$

حيث Γ هو المربع الذى رؤوسه النقاط :

$$1 \pm i \quad , \quad -1 \pm i$$

٣) برهن مايلي بعد التأكد من تحقق شروط الحساب في كل حالة :

آ)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

ب)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta + 2)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

ج)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

د)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x-1)^2 + 9}\, dx = \frac{\pi}{3e^6} \cos 2$$

هـ) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x-1)(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\cos 2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

و) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{1+x^3} = -0.768$$

ز) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{P-1}\, dx}{(x+2)(x+3)} = \frac{\pi}{\sin P\pi}\left[2^{P-1} - 3^{P-1} \right]$$

حيث $0 < P < 2$

٦ - التطبيقات وتمثيلها

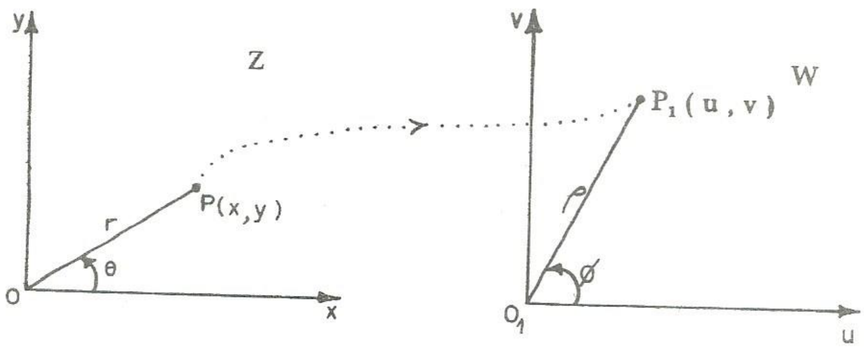
٦ - ١ التابع العقدي والتطبيق

رأينا أن التابع العقدي $w = f(z)$ يمكن وضعه بالشكل :

$$w = u + iv = \rho e^{i\Phi} \quad , \quad z = x + iy = r e^{i\theta} \quad ,$$

$$[\,(x, y), (r, \theta) \in Z\,]$$

حيث u, v أو ρ, Φ هما تابعان حقيقيان للمتحولين الحقيقيين المستقلين x, y أو r, θ وبالتالي فان $w = f(z)$ هو تطبيق لمجموعة نقطية مفتوحة S من المستوي Z (أي المستوي $x\,y$) على المجموعة المفتوحة الموافقة لها S_1 من المستوي W (أي المستوي $u\,v$) ونمثل ذلك كما في الشكل (١) حيث $P \in S \quad , \quad P_1 \in S_1$.



الشكل (١)

٦ - ٢ التابع التحليلي والتطبيق والتقابل مستمر المشتقات

اذا كان $w = f(z)$ تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{D}}$ فتوجد للتابع

في النطاق $\mathcal{D}$ مشتقات مستمرة ، ولذا فان v , u تابعان مستمران للمتحولين المستقلين y , x ويكون $w = f(z)$ تطبيقاً مستمر المشتقات للنطاق $\mathcal{D}$ من المستوي Z على النطاق بسيط الاتصال الموافق له $\mathcal{D}_1$ من المستوي W ويمكن أن يكون $\mathcal{D}$ أو $\mathcal{D}_1$ أو كلاهما نطاقاً غير محدد . ان يعقوبي هذا التطبيق هو :

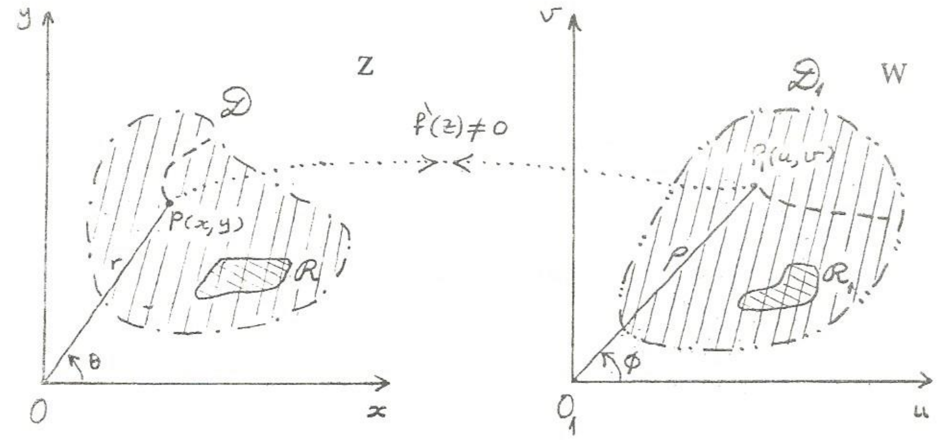
$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 = |f'(z)|^2$$

وذلك باستخدام معادلات كوشي - ريمن .

ينتج من ذلك أنه اذا كان $f'(z) \neq 0$ في $\mathcal{D}$ فان التابع التحليلي $w = f(z)$ هو موضعيا تقابل مستمر المشتقات ، أي أن التابع العكسي $z = f^{-1}(w)$ تحليلي أيضاً . ان النقاط التي ينعدم فيها $f'(z)$ هي النقاط الحرجة ، وفيها يكون التابع العكسي غير موجود أو غير تحليلي .

في هذا التقابل يكون $\mathcal{D}_1$ صورة $\mathcal{D}$ وبالعكس مع العلم أن التقابل موضعي ،أي يتعلق فقط بنقطة وجوار صغير لها ولا يتعلق بالنطاقين ككل. ان كل نقطة أو منحن أو منطقة في $\mathcal{D}$ تقابلها على الترتيب نقطة أو منحن أو منطقة وحيدة في $\mathcal{D}_1$ وبالعكس ، مع العلم أن كل منحن صقيل (أو صقيل جزئياً) يقابله منحن وحيد وصقيل (أو صقيل جزئياً) وبالعكس ، كما أنه لا يتحتم وجود تقابل بين المنحنيين المحيطين بالنطاقين . نمثل ذلك في الشكل (٢) وقد خططت المنحنيات المتقابلة بالتخطيط نفسه كما ظللت النطاقات أو المناطق المتقابلة بالتظليل نفسه .

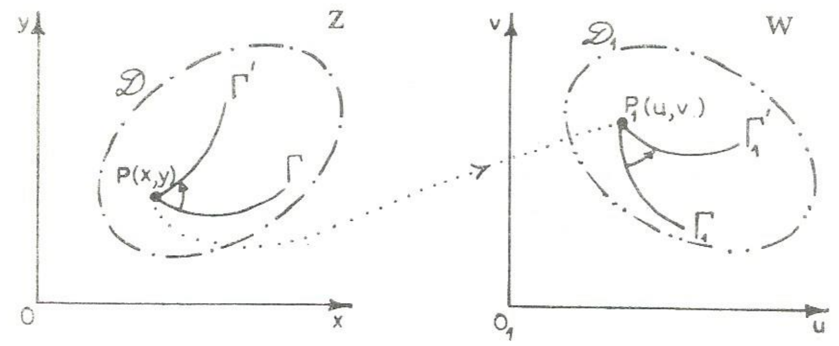


الشكل (٢)

ملاحظة :

اذا كان التابع $w = f(z)$ فرعا أساسيا ، فمن الواضح أن النطاق $\mathcal{D}$ لا يشمل مستقيمات التفرع .

٦ - ٣ التقابل مستمر المشتقات والتطبيق المطابق



الشكل (٣)

تعريف التطبيق المطابق :

اذا تم بواسطة التطبيق مستمر المشتقات :

$$(6 \cdot 3 \cdot 1) \quad \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

حيث $u , v \in Cl^1$ في نطاق بسيط الاتصال $\mathcal{D}$

تطبيق النقطة $P(x, y) \in \mathcal{D}$ من المستوي Z على النقطة الموافقة لها $P_1(u, v) \in \mathcal{D}_1$ من المستوي W وتطبيق المنحنيين $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{D}$ المتقاطعين في النقطة (x, y) على المنحنيين الموافقين $\Gamma_1, \Gamma_1' \in \mathcal{D}_1$ المتقاطعين في النقطة (u, v) واذا كانت الزاوية بين المنحنيين الاولين مساوية للزاوية بين المنحنيين الاخيرين ومتفقة معها في الاتجاه (الشكل ٣) فان (6 . 3 . 1) يدعى تطبيقاً مطابقاً في النقطة (x, y).

ملاحظة هامة :

يمكن البرهان أن التطبيق المطابق في كل نقطة من النطاق بسيط الاتصال $\mathcal{D}$ يجب أن يكون من الشكل :

$$w = f(z) = u + iv \quad , \quad z = x + iy$$

حيث $w = f(z)$ هو تابع تحليلي في $\overline{\mathcal{D}}$ وذو مشتق غير منعدم في $\mathcal{D}$ ونبرهن فيما يلي نظرية العكس ، مما يثبت أن التابع التحليلي في منطقة بسيطة الاتصال وذي المشتق غير المنعدم داخلها (أي التقابل مستمر المشتقات) والتطبيق المطابق هما شيء واحد .

نظرية :

اذا كان $w = f(z)$ تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{D}}$ وذا مشتق

$f'(z)$ غير منعدم في $\mathcal{D}$ فان $w = f(z)$ هو تطبيق مطابق في كل نقطة من $\mathcal{D}$ وهذا التطبيق يدور الزوايا موضعياً بمقدار $\arg[f'(z)]$ ويكبر (أو يصغر) الاطوال والمساحات موضعياً بالنسبة $\|f'(z)\|$, $\|f'(z)\|^2$ على الترتيب .

البرهان : لقد رأينا أن هذا التابع هو تقابل مستمر المشتقات . لتكن $z = x(t) + iy(t)$ (حيث t هو متحول حقيقي) معادلة المنحني Γ من النطاق $\mathcal{D}$ فتكون معادلة المنحني المقابل له Γ_1 في النطاق $\mathcal{D}_1$ هي $w = f[x(t) + iy(t)]$.

لتكن β , α على الترتيب الزاوية التي يصنعها المماس لكل من المنحنيين Γ , Γ_1 مع المحور الحقيقي الموجب لأجل قيمة واحدة للمتحول t فلدينا عندئذ :

$$\alpha = \arg\left[\frac{dz}{dt}\right] = \arg[x^{\cdot}(t) + iy^{\cdot}(t)]$$

$$\beta = \arg\left[\frac{dw}{dt}\right] = \arg\left[\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}\right]$$

$$= \arg\left\{[f'(z)][x^{\cdot}(t) + iy^{\cdot}(t)]\right\}$$

$$= \arg[f'(z)] + \arg[x^{\cdot}(t) + iy^{\cdot}(t)]$$

ومنه :

$$\beta = \arg[f'(z)] + \alpha \qquad (i)$$

أي أن الزاويتين في النقطتين المتقابلتين $f(z)$, z من المستويين مستقلتان عن المنحنيين Γ , Γ_1 وتحتفظان بالقيمة والاتجاه ، وينتج فقط تدوير موضعي للزاوية الاصلية α بمقدار $\arg[f'(z)]$.

نكرر العملية بالنسبة لمنحن آخر Γ' يمر بالنقطة z والمنحني المقابل له المار بالنقطة $f(z)$ فينتج :

$$(ii) \qquad \beta' = \arg[f'(z)] + \alpha'$$

وبطرح (i) من (i i) ينتج :

$$\beta' - \beta = \alpha' - \alpha$$

أي أن الزاوية بين المنحنيين في المستوي Z تساوي الزاوية بين مقابليهما في المستوي W وتتفق معها في الاتجاه . ان العلاقة بين عنصري الطول $|dw|$, $|dz|$ على المنحنيين هي :

$$(iii) \qquad |dw| = |f'(z)|\,|dz|$$

أي أن الاطوال تكبر (أو تصغر) موضعياً بالنسبة $|f'(z)|$.

لقد رأينا في بحث التقابل مستمر المشتقات أن العلاقة بين عنصر المساحة dA من المستوي Z وعنصر المساحة dA_1 من المستوي W هي :

$$dA_1 = |J|\,dA$$

وبما أن $|J| = |f'(z)|^2$ هنا فينتج :

$$(iv) \qquad dA_1 = |f'(z)|^2\,dA$$

أي أن المساحات تكبر (أو تصغر) موضعياً بالنسبة $|f'(z)|^2$.

ملاحظة :

في النقاط الحرجة (أي عندما $f'(z) = 0$) يكون التطبيق غير مطابق (أي أنه لا يوجد تقابل مستمر المشتقات) ، وإن زاوية التدوير فهي غير معينة كما يتضح من

العلاقة (i) ، ونسبة التكبير (أو التصغير) منعدمة كما يتضح من العلاقتين (iii) و (iv) .

نتائج :

في التطبيق المطابق للنطاق $\mathcal{D}$ على $\mathcal{D}_1$ ينتج :

أولا) ان المضلعات الصغيرة جداً في $\mathcal{D}$ تقابلها مضلعات متشابهة معها في $\mathcal{D}_1$ وبالعكس لأن أضلاعها تدور بزاوية ثابتة وأطوال أضلاعها تكبر (أو تصغر) بنسبة ثابتة . أما المضلعات الكبيرة فلا تتشابه وقد تختلف عن بعضها كلية . إن ماذكرناه عن المضلعات ينطبق أيضاً على الاشكال المغلقة من أي نوع كانت .

ثانياً) ان جملتين من المنحنيات المتعامدة في $\mathcal{D}$ تقابلهما جملتان متعامدتان في $\mathcal{D}_1$ وبالعكس لأن التطبيق المطابق يحتفظ بقيم الزوايا ، وبشكل خاص اذا كان A , B وسيطين حقيقيين وكان $f(z) = u + iv$ فان جملتي المنحنيات :

$$u(x, y) = A \quad , \quad v(x, y) = B$$

الواقعتين في المستوي xy متعامدتان لأن صورها :

$$u = A \quad , \quad v = B$$

جملتان من المستقيمات المتعامدة في المستوي uv .

ثالثا) ان أحد أسباب دراسة التطبيق المطابق هو أن حل معادلة لا بلاس المستوية يبقى حلا لها عند اخضاع هذا الحل لتطبيق مطابق ، أي اذا كان Ψ حلا لمعادلة لا بلاس في المستوي xy بحيث يكون $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$ واخضعنا Ψ لتطبيق مطابق ينقله الى المستوي uv فان :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} = 0$$

ان هذه النتائج الثلاث بالغة الاهمية في حل مسائل عديدة في الكهرباء وميكانيك الموائع وانتقال الحرارة .

٦ — ع بعض التطبيقات الهامة

لا يمكن حصر التطبيقات ونورد فيما يلي بعض الحالات البسيطة ، وتعبر الحالات الست الاولى عن عمليات هندسية أولية .

أولا) التطبيق الانزاحي :

ان التطبيق $w = z + a$ حيث a هو عدد عقدي يزيح الاشكال الواقعة في المستوي Z وفق الشعاع a وهو تطبيق مطابق دوماً .

ثانيا) التطبيق التدويري :

ان $w = z e^{i\alpha}$ حيث α هو عدد حقيقي يدور الاشكال في المستوي Z بزاوية قدرها α ويكون الدوران موجباً أو سالباً حسبما تكون α موجبة أو سالبة . هذا التطبيق مطابق دوماً .

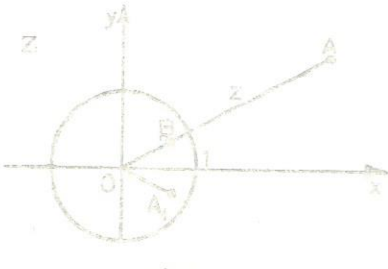
ثالثا) التطبيق التكبيري (أو التصغيري) :

ان $w = a z$ حيث $a > 1$ يكبر بالنسبة a ووفق الشعاع z الاشكال الواقعة في المستوي Z . أما اذا كان $0 < a < 1$ فانه يصغرها . هذا التطبيق مطابق دوماً .

رابعاً) التطبيق الانعكاسي :

يمكن وضع التابع $w = \frac{1}{z}$ بالشكل $w = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{r^2}$ مما يدل أن w موجه وفق

$\bar{z}$ علماً أن طويلته هي $\frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$. هذا التطبيق يعكس z بالنسبة للدائرة $|z| = 1$ ثم يوجه الناتج وفق $\bar{z}$ كما في الشكل (٤) حيث النقطة A هي z و B معكوسها بالنسبة للدائرة $|z| = 1$ (أي بحيث يكون $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1$) ثم نأخذ نظير B بالنسبة للمحور الحقيقي لنحصل على النقطة A_1 أي $1/z$. هذا التطبيق مطابق الا في النقطة الشاذة $z = 0$.



الشكل (٤)

خامساً) التطبيق الخطي :

ان $w = a z + b$ (حيث b , a هما عقديان) هو تطبيق خطي يشكل حصيلة ثلاث عمليات : ازاحة ودوران وتكبير . هذا التطبيق مطابق دوماً .

سادساً) التطبيق الخطي الثنائي :

ان $w = \frac{a z + b}{c z + d}$ حيث $a d - b c \neq 0$ وكلها اعداد عقدية يشكل حصيلة اربع عمليات : ازاحة ودوران وتكبير وانعكاس . ان هذا التطبيق مطابق الا في النقطة الشاذة $z = -d/c$ ويمتاز بالخصائص التالية :

— يحول الدوائر في المستوي Z الى دوائر في المستوي W وبما أن الحالات الخمس السابقة هي حالات خاصة منه ، فكلها تحول الدوائر الى دوائر .

— يحول أية ثلاث نقاط مختلفة z_1 , z_2 , z_3 في المستوي Z (ويمكن أن تكون

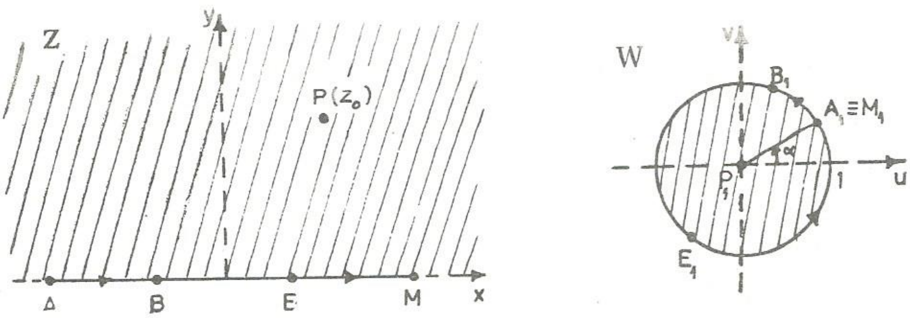
احداها في اللانهاية) الى ثلاث نقاط مختلفة w_1 , w_2 , w_3 بحيث اذا كانت z وصورتها w مغايرة للنقاط المتقابلة في المستويين ، فان النسبة التالية تبقى ثابتة:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \qquad (6.4.1)$$

وهذه الخاصة تمكننا من ايجاد تطبيقات معينة تطبق ثلاث نقـــاط مفروضة على ثلاث نقاط أخرى مفروضة .

سابعا) تطبيق النصف العلوي من مستو على داخل الدائرة الوحدة :

إن ($w = e^{i\alpha}\left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}\right)$ حيث α هو حقيقي و z_0 نقطة من النصف العلوي المستوي Z) هو تطبيق لنصف المستوي هذا على داخل الدائرة $|w| = 1$ (الشكل ٥) بحيث تقابل النقاط على محور x نقاطاً على محيط الدائرة $|w| = 1$ ويمكن تعيين قيمـة α بأن نجعل نقطة معينة من O x (M مثلا) تقابل نقطة معينة من الدائرة ($M_1 = A_1$). ان هذا التطبيق مطابق دوماً .

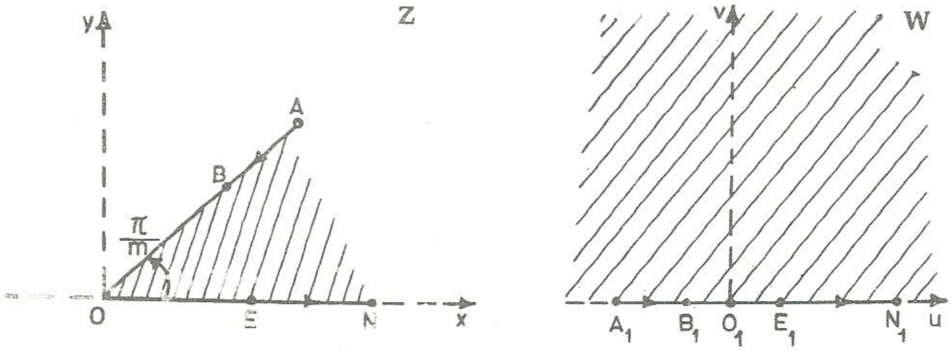


الشكل (٥)

ثامناً) تطبيق قطاع من مستو على النصف العلوي لمستو آخر :

ان $w = z^m$ حيث $m \geqslant 1/2$ تطبق قطاعاً من المستوي Z وأحد ضلعيه منطبق على O x ورأسه في O وزاويته π/m على النصف العلوي من المستوي W كما في الشكل (٦) .

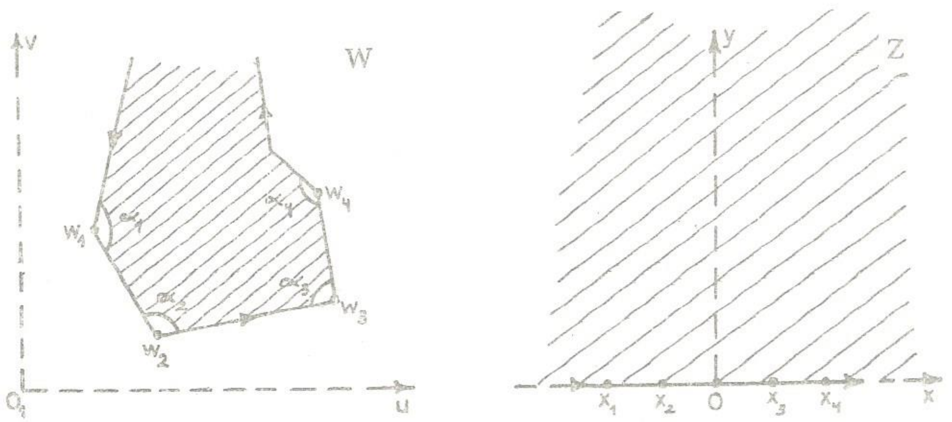
اذا كان m عدداً صحيحاً فان التطبيق مطابق الا في النقطة الحرجة $z = 0$ أما اذا كان m عدداً كسرياً فان O x هو مستقيم التفرع . يجب أن نلاحظ أنه باستخدام (سابقا) يمكن تطبيق الناتج على داخل الدائرة الوحدة .



الشكل (٦)

تاسعاً) تطبيق شوارتز - كريستوفل :

يطبق النطاق الواقع في المستوي W ضمن مضلع مغلق عدد رؤوسه محدود n على النصف العلوي من المستوي Z وتقع النقاط المقابلة لرؤوس المضلع على المحور الحقيقي O x كما في الشكل (٧) حيث $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ هي الزوايا الداخلية للمضلع .



الشكل (٧)

ان التطبيق ينتج من :

$$\frac{dw}{dz} = A\,(z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}\,(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \ldots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \qquad (6.4.2)$$

ومنه فان :

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi - 1}\,(z - x_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \ldots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1}\, dz + B \qquad (6.4.3)$$

حيث A هو ثابت اختياري عقدي يحدد مقياس واتجـاه المضلع و B هو ثابت اختياري عقدي يحدد موقع هذا المضلع ، ومن الواضح أن التطبيق غير مطابق في النقاط $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$. يجب أن نلاحظ أنه :

- يمكن اعتبار المضلع اللانهائي المفتوح كحالة خاصة من المضلع المغلق الذي يصبح أحد رؤوسه في اللانهاية .

- يمكن اختيار أية ثلاث نقاط من $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ كما نشاء ، ويسهل الأمر اذا

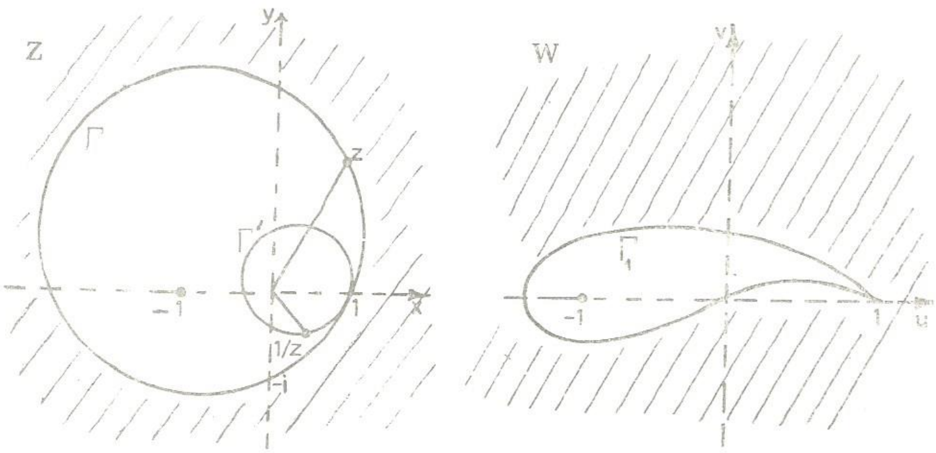
اخترنا احداهـــا في اللانهاية . فمثـلا اذا كانت x_n في اللانهايــــة فان العامل $(z - x_n)^{\alpha_n/\pi - 1}$ عندئذ غير موجود في الملاقتين (6 . 4 . 2) و (6 . 4 . 3) .

ـ باستعمال (سابقاً) يمكن تحويل الناتج الى داخل الدائرة الوحدة أي أنه يمكن تطبيق داخل مضلع مفروض على داخل الدائرة الوحدة باستخدام تطبيقين متتاليين .

عاشراً) تطبيق جوكفسكي :

إن $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ يطبق دائرة Γ واقعة في المستوي Z ومارة بالنقطتين $z = 1$, $z = -i$ وتحوي النقطة $z = -1$ داخلها على شكل Γ_1 في المستوي W يشبه مقطع جناح الطائرة (الشكل ٨) ويمكن الحصول على أشكال مشابهة بتغيير موضع الدائرة Γ .

بما أن $\frac{dw}{dz} = \frac{z^2 - 1}{2z^2}$ فان النطاق خارج Γ يطبق تطابقياً على النطـاق خارج Γ_1 وذلك لأن النقطة الحرجة الاولى $z = 1$ تقع على Γ والنقطة الحرجة الثانية $z = -1$



الشكل (٨)

تقع مع النقطة الشاذة $z = 0$ داخل الدائرة Γ . ان صورتي النقطتين الحرجتين همـــا $w = 1$, $w = -1$ على الترتيب والنقطة $w = 1$ هي نقطة تراجع على Γ_1 .

يمكن الحصول على المنحني Γ_1 هندسيـــاً ، وذلك بأن نجعل z تتحول على الدائرة Γ فتتحول $1/z$ على الدائرة Γ' الناتجة من انعكاس Γ بالنسبة للدائرة الوحدة $|z| = 1$ ثم أخذ نظير الناتج حسب (رابعاً) ، وبعد ذلك نأخذ نصف مجموع الشعاعين $1/z$, z .

امثلـــــــة (٦)

مثال ٦-٢-١

عيّن صورة المنطقة $1 \leqslant |Z| \leqslant 2$ وفق التطبيق $w = Z^2$

وبرهن على وجود تقابل مستمر المشتقات بين المنطقتين .

الحـــل :

بوضـــع $Z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\phi}$ ينتج :

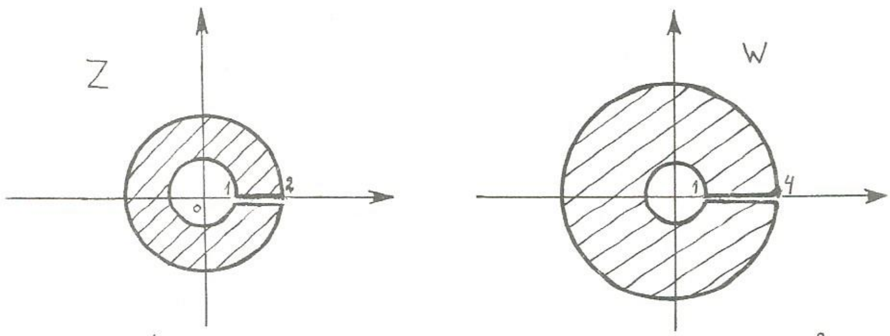
$$\rho e^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta} \quad , \quad (0 \leqslant \theta, \phi < 2\pi)$$

ومنه $\rho = r^2$

ان المنطقة المفروضة في المستوى Z هي $1 \leqslant r \leqslant 2$

فتكون صورتها في المستوى W هي $1 \leqslant \rho \leqslant 4$

وقد ظللت المنطقتان في الشكل المرافق :



ان $w = Z^2$ هو تابع تحليلي دوما ومشتقه $w' = 2Z$ ينعدم

لاجل $Z = 0$ فقط وبما ان النقطة الحرجة $Z = 0$ تقع خارج المنطقة

$1 \leqslant |Z| \leqslant 2$ فيوجد تقابل مستمر المشتقات بين المنطقتين

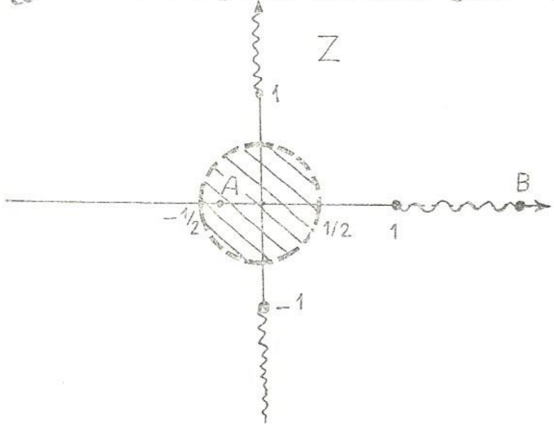
مثال ٦-٣-١

برهن ان التابع العقدي $w = \ln\left(\frac{Z^2+1}{Z-1}\right)$ ليس تطبيقا في النطاق $|Z| < \frac{1}{2}$.

<u>الحل :</u>

التابع $w = \ln\left(\frac{Z^2+1}{Z-1}\right) = \ln(Z^2+1) - \ln(Z-1)$

تحليلي في المستوي Z الذى حذفت منه مستقيمات التفرع المبينة والمنطلقة من نقاط التفرع الثلاثة i , $-i$, 1 اى انه تحليلي في المنطقة $|Z| \leqslant \frac{1}{2}$.



ان مشتق التابع هو:

$$w' = \frac{2Z}{Z^2+1} - \frac{1}{Z-1}$$

$$= \frac{Z^2-2Z-1}{(Z-1)(Z^2+1)}$$

والمشتق ينعدم في النقطة B (حيث $Z = 2.414$) الواقعة خارج النطاق $|Z| < \frac{1}{2}$ كما انه ينعدم في النقطة A (حيث $Z = -0.414$) الواقعة داخل النطاق $|Z| < \frac{1}{2}$

فالتطبيق ليس مطابقا في هذا النطاق .

مثال ٦-٣-٢

بيّن مستعينا بالرسم ما اذا كانت التوابع العقدية التاليـــــة تطبيقات مطابقة في النطاق المعين لكل تابع :

آ) $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$, $r < 2\cos\theta$

ب) $w = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2y - y^3)$, $|z - i| < 0.5$

ج) $w = \ln\left[2z + (1.25 - z^2)^{1/2}\right]$, $|z| < 0.5$

د) $w = z + \cos z$, $|z| < \pi$

الحـــل :

ان النظرية الواردة في الفقرة ٦-٣ تنص ان الشرطين الواجـــب توفرهما في تابع عقدى لكي يكون تطبيقا مطابقا في نطاق بسيط الاتصال $\mathcal{D}$ هما :

اولا : التابع تحليلي في المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ (اى في اغلاق النطاق)

ثانيا : مشتقه الاول لا ينعدم في $\mathcal{D}$ (اى لا توجد نقـــاط حرجة في النطاق) .

نبحث في كل حالة عن تحقق الشرطين :

آ) لدينا

$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$w = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z}$$

التابع كسرى جبرى عادى فهو تحليلي باستثناء النقطة الشاذة الوحيدة $z = 0$.

النطاق $\mathcal{D}$ في هذه الحالة هو :

$$r < 2 \cos \theta$$

اى :

$$\sqrt{x^2+y^2} < 2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2+y^2 < 2x$$

ومنه

$$(x-1)^2 + y^2 < 1$$

وهو نطاق دائري مركزه النقطة (0 , 1) ونصف قطره الواحد

والشكل المرافق يبين المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$

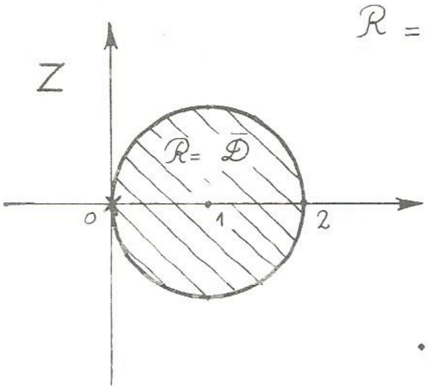
اى $(x-1)^2+y^2 \leq 1$

كما يبين النقطةالشاذة $z = 0$

الواقعة في $\mathcal{R}$ فالتطبيق ليس

مطابقا لعدم تحقق الشرط الاول

ولا حاجة اذن للتحقق من الشرط الثاني.



ب) لدينا :

$$w = (x^3 - 3xy^2 + 2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$= (x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) + 2$$

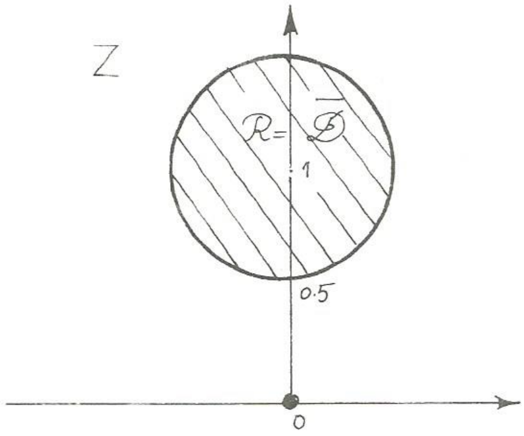
$$= (x+iy)^3 + 2 = z^3 + 2$$

التابع هنا كثير حدود فهو تحليلي دوما . ان مشتقه هو :

$$w' = 3Z^2$$

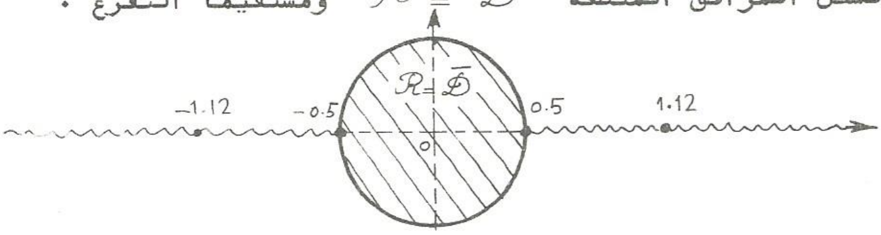
وهذا المشتق ينعدم لاجل $Z = 0$ وهي النقطة الحرجة الوحيدة للتطبيق وهي مبينة في الشكل المرافق وقد رسمت فيه المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ ايضا .

هذا التطبيق مطابق لتحقق الشرطين اذ ان النقطة الحرجة تقع خارج $\mathcal{D}$.



ج) ان
$$w = \ln\left[2Z + (1.25 - Z^2)^{1/2}\right]$$

تابع لغاريتمي عام فهو تحليلي في المستوى Z الذى حذفت منه مستقيمات التفرع المنطلقة من نقاط التفرع الناتجة من انعدام مضمون اللغاريتم وهي $Z = \pm 0.5$
او مضمون الجذر وهي $Z = \pm 1.12$ وقد رسمت في الشكل المرافق المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ ومستقيما التفرع .

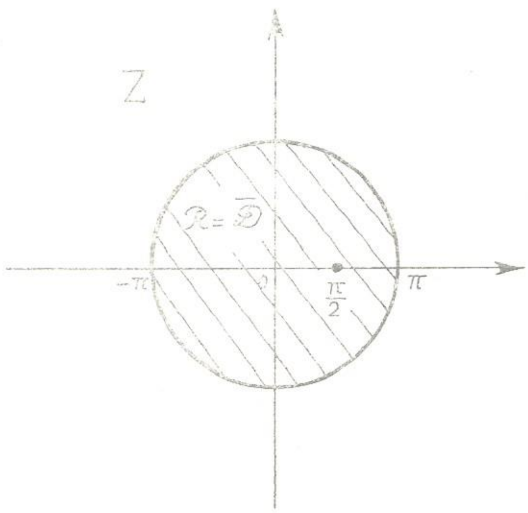


يتضح من الشكل ان التابع غير تحليلي في $\mathcal{R}$ فالتطبيق ليس مطابقا في النطاق $\mathcal{D}$ لعدم تحقق الشرط الاول .

د) ان $w = z + \cos z$ هو تابع تحليلي دوما لانه مكون من تابعين تحليليين فهو تحليلي في المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ اى في $|z| \leqslant \pi$ ومشتقه هو:

$$w' = 1 - \sin z$$

ينعدم المشتق لاجل $z = \frac{\pi}{2}$ وهي نقطة حرجة واقعة داخل $\mathcal{D}$ ولاجل قيم اخرى واقعة خارج $\mathcal{D}$ فنهملها والشكل المرافق يبين المنطقة



اى $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ كما $|z| \leqslant \pi$ يبين النقطة الحرجة الداخلية الوحيدة .

هذا التطبيق غير مطابق رغم تحقق الشرط الاول وذلك لان الشرط الثاني لم يتحقق .

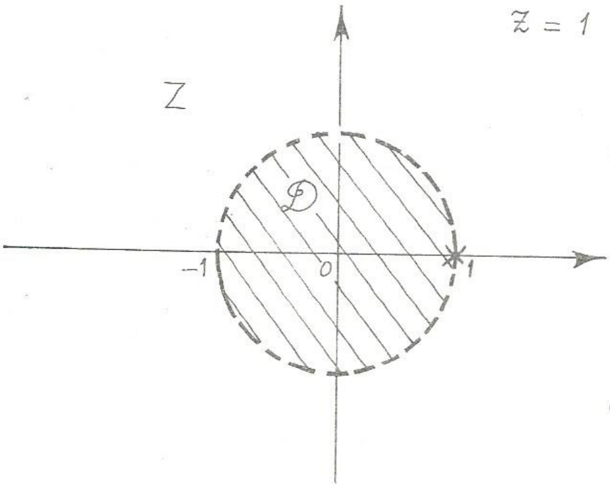
مثال ٦-٣-٣

في المستوى العقدى Z عيّن اكبر نطاق دائرى يمكن فيه

نشر التابع $w = \frac{1}{z-1}$ وفق قانون ماك لورين ثم برهن ان التابع ليس تطبيقا مطابقا في النطاق الناتج ٠

<u>الحل :</u>

ان $w = \frac{1}{z-1}$ تابع كسري جبري عادي له نقطة شاذة وحيدة في المستوى Z وهي $z = 1$



فيمكن نشره وفق قانون ماك لورين في النطاق الدائري $\mathcal{D}$ الذي مركزه 0 ونصف قطره الواحد اي في النطاق $|z| < 1$ المبين في الشكل المرافق ٠

ان التابع ليس تطبيقا مطابقا في النطاق $|z| < 1$ لانه ليس تحليليا في المنطقة الناتجة من اغلاق النطاق اي في المنطقة $|z| \leqslant 1$ ٠

مثال ٦-٣-٤

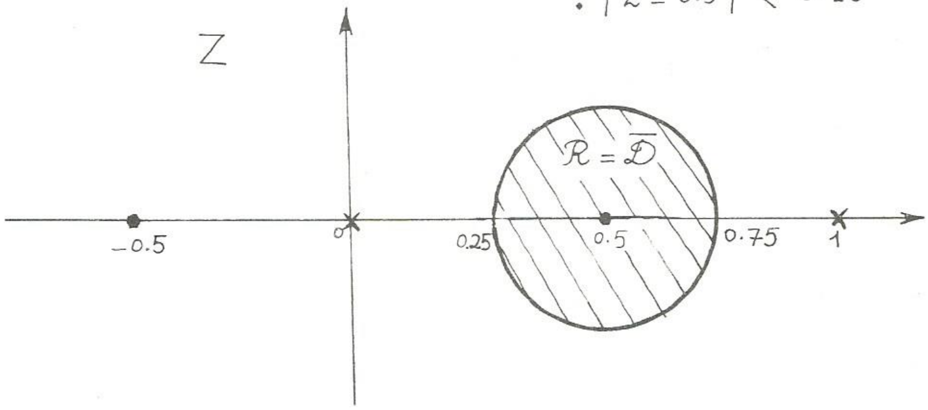
بيّن مستعينا بالرسم امكانية استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب المشتق النوني للتابع $w = \operatorname{Cosec}(\pi z)$ في النطاق $|z - 0.5| < 0.25$ وبيّن ما اذا كان التطبيق مطابقا في هذا النطاق ٠

الحـــل :

ان $w = \frac{1}{\sin(\pi z)}$ تابع تحليلي باستثناء النقــاط الشاذة الناتحة من انعدام مخرجه وهي :

$$z = k \qquad , \qquad k = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \dots$$

وقد تم رسم النقاط القريبة من المبدأ في الشكل المرافق كما رسمت فيه المنطقة $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{D}}$ وهي $|z - 0.5| \leqslant 0.25$ ويتضح منه عدم وجود نقاط شاذة في $\mathcal{R}$ فيمكن استخدام صيغة كوشي التكاملية لحساب المشتق النوني لهذا التابع في النطــاق $|z - 0.5| < 0.25$.



ان المشتق هو :

$$w' = - \frac{\pi \cos(\pi z)}{\sin^2(\pi z)}$$

وينعدم لاجل $z = \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad k = 0 , \pm 1 , \dots$

وعليه فان النقطة $z = 0.5$ هي النقطة الحرجة الوحيدة فـــي $\mathcal{R}$ فالتطبيق ليس مطابقا في $\mathcal{D}$ رغم ان التابع تحليلـــي في $\bar{\mathcal{D}}$.

مثال ٦ ـ ٣ ـ ٥ : أوجد جملتي المنحنيات المتعامدة المعينتين بالتابع $w = \ln z$.

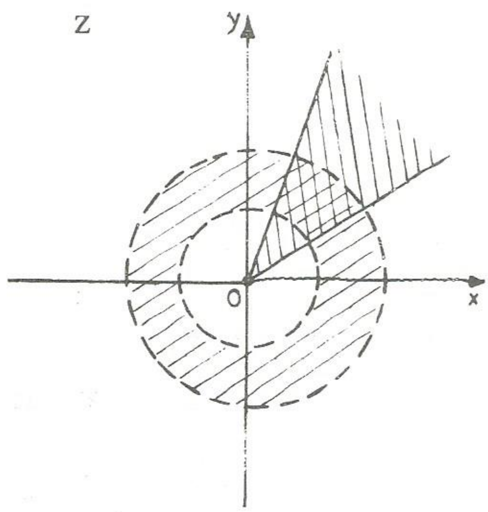
الحل :

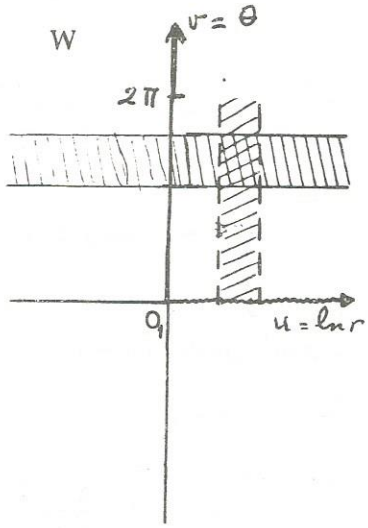
$$w = \ln z = u + iv = \ln r + i\theta \quad , \quad (r > 0 \quad , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

حيث Ox هو مستقيم التفرع . اذا كان A , B وسيطيين فان الجملتين :

$$\ln r = A \qquad , \qquad \theta = B$$

متعامدتان . إن $\ln r = A$ هي جملة دوائر متمركزة في O كما أن $\theta = B$ هي جملة مستقيمات متلاقية في O ومن الواضح أن هذا التطبيق يطبق النطاق الحلقي الواقع بين دائرتين في المستوي Z على شريط لانهائي في المستوي w كما أن قطاع المستوي Z يطبق على شريط عمودي على الشريط الاول في المستوي W وقد مثل ذلك في الشكل المرافق ، وتظهر فيه مستقيمات التفرع المتقابلة .





مثال ٦ – ٤ – ١ : أوجد تطبيقاً خطياً ثنائياً يطبق النقـاط $1-, i-, 0$ في المستوي Z على النقاط $0, 1, i$ على الترتيب في المستوي W .

الحل : باستخدام القانون (6 . 4 . 1) ينتج :

$$\frac{(w-i)(1-0)}{(w-0)(1-i)} = \frac{(z-0)(-i+1)}{(z+1)(-i-0)}$$

ثم نحسب w بدلالة z فنحصل على $w = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.

مثال ٦ – ٤ – ٢ : أوجد تطبيقاً يطبق النصف العلوي من المستوي Z على داخل الدائرة $|w| = 1$ بحيث تكون $z = i$ مقابلة للنقطة $w = 0$ و $z = \infty$ مقابلة للنقطـة $w = -1$.

الحل : من (سابقاً) ينتج أن التطبيق المطلوب هو من الشكل :

$$w = e^{i\alpha}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)$$

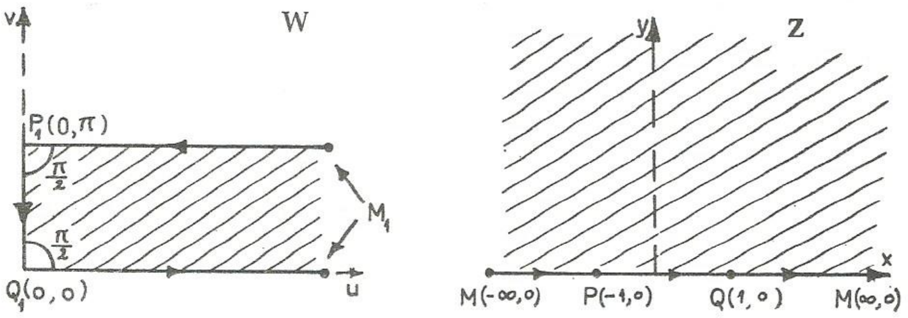
بما أن $w = 0$ تقابل $z = i$ فان $0 = e^{i\alpha}\left(\frac{i-z_0}{i-\bar{z}_0}\right)$ ومنه $z_0 = i$.

وبما أن $w = -1$ تقابل $z = \infty$ فان $-1 = e^{i\alpha}$ ومنه $\alpha = \pi$ والتطبيق المطلوب هو :

$$w = -1\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{i-z}{i+z}$$

مثال ٦ - ٤ - ٣ : باستخدام (ثامناً) نرى أن $t = z^{3/2}$ يطبق القطاع في Z الذي رأسه O وزاوية رأسه $2\pi/3$ وأحد ضلعيه منطبق على المحور الحقيقي على النصف العلوي من المستوي T وباستخدام ($w = e^{i\alpha}\left(\frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0}\right)$ أي التطبيق (سابعاً) نطبق الناتج على داخل الدائرة $|w| = 1$ في المستوي W .

مثال ٦ - ٤ - ٤ : أوجد التطبيق الذي يطبق الشريط اللانهائي الواقع في المستوي W والمبين في الشكل المرافق على النصف العلوي من المستوي Z وقد أوضحت النقاط المتوافقة في الشكل.



الحل : في المستوي W نختار كرؤوس ثلاثة للمضلع المفتوح النقاط Q_1 , P_1 , M_1 كما هو مبين في الشكل مع النقاط الموافقة لها في Z فينتج من القانون (6 . 4 . 2) أن:

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{\pi/2}{\pi} - 1}(z-1)^{\frac{\pi/2}{\pi} - 1} = \frac{A}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

ومنه :

$$w = A\, ch^{-1} z + B$$

بما أن $w = 0$ عندما $z = 1$ فان $B = 0$

وبما أن $w = i\pi$ عندما $z = -1$ فان $A = 1$

والتطبيق المطلوب هو $w = ch^{-1} z$.

مسـائل (٦)

١) عيّن صورة المنحني $y = x^2$ وفق التطبيق $w = -2z + i2$

وصورة المنطقة $|z+1| \leq 1$ وفق التطبيق $w = \frac{1}{z}$

موضحا اجوبتك بالرسم .

الجواب $u^2 = -2v + 4$ ، $u \leqslant -\frac{1}{2}$

٢) عيّن جملة من المنحنيات المتعامدة مع الجملة :

آ) $e^{-x} \cos y + xy = A$ حيث A هو وسيط .

ب) $r^2 \cos 2\theta = \alpha$ حيث α هو وسيط .

الجواب :

آ) $y^2 - x^2 - 2e^{-x} \sin y = B$ حيث B هو وسيط .

ب) $r^2 \sin 2\theta = b$ حيث b هو وسيط .

٣) في المستوى العقدى Z عيّن مستعينا بالرسم النطـاق

الذى يكون فيه $w = \ln\left[\frac{z^3 - 1}{(z+i)^3}\right]$ تابعا تحليليا

ثم برهن انه ليس تطبيقا مطابقا في اى نطاق دائرى مركـزه

النقطة $z = e^{i5\pi/4}$.

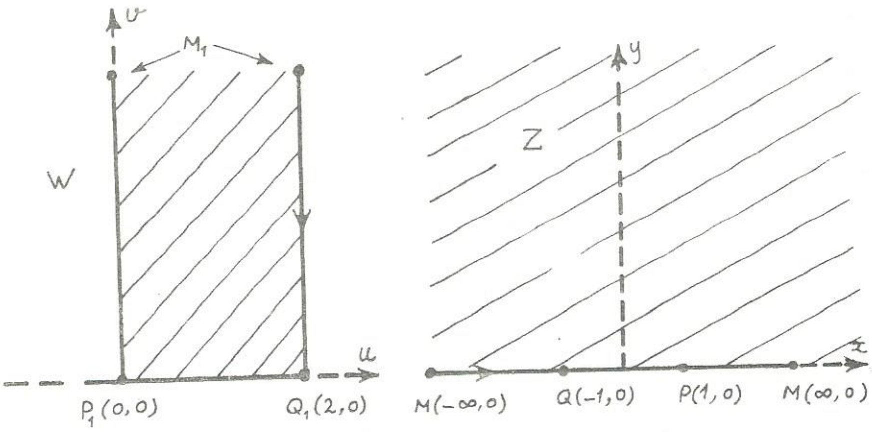
٤) برهن مستعينا بالرسم ان التوابع الثلاثة :

$$w = z - \operatorname{sh} z \quad , \qquad w = \ln\left[z + (0.5 - z^2)^{1/2}\right]$$

$$w = \sec \pi z$$

ليست تطبيقات مطابقة في النطاق $|z| < \frac{1}{2}$.

٥) عيّن التابع الذى يطبق النطاق المبين من المستوى W على النطاق المبين من المستوى Z .



الجواب : $\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) = z$

المصطلحات العلميـــة

مرتبة أبجديا بالانكليزية

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Adiabatic	Adiabatique	كظيم
Angle	Angle	زاوية
solid	« solide	زاوية مجسمة
Argument	Argument	السعة
Axis	Axe	المحور
coordinate	« de coordonnées	محور الاحداثيات
imaginary	« imaginaire	المحور التخيلي
real	« réel	المحور الحقيقي
Bound	Borne	الحـــد
greatest lower	« supérieure	الحد الاعلى الاصفري
least upper	« inférieure	الحد الادنى الاعظمي
Branch	Branche	الفرع
principal	« principale	الفرع الاساسي
Centre of gravity	Centre de gravité	مركز الثقل
Centroid	Centroïde	المركز المتوسط
Class	Classe	الصف
Complex	Complexe	العقدي

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Complex conjugate	Complexe conjugué	المرافق العقدي
Conditions	Conditions	الشروط
boundary	« aux limites	الشروط الحدية
initial	« initiales	الشروط الابتدائية
Conductivity	Conductibilité	الناقلية ــ الايصال
Constant	Constant	ثابت
arbitrary	« arbitraire	ثابت اختياري
dielectric	« diélectrique	ثابت السماحية
Contour	Contour	اطـــار
Convergence	Convergence	التقارب
absolute	« absolue	« المطلق
conditional	« non-absolue	« الشرطي
domain of	domaine de	نطاق التقارب
radius of	rayon de	نصف قطر التقارب
Coordinates	Coordonées	احداثيات
cartesian	« cartésiennes	« ديكارتية
curvilinear	« curvilignes	« منحنية
cylindrical	« cylindriques	« اسطوانية
orthogonal curvilinear	« curvilignes orthogonales	« منحنية متعامدة
polar	« polaires	« قطبية
spherical	« sphériques	« كروية
Cusp	Point de rebroussement	نقطة تراجع

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Current density	Densité de courant	كثافة التيار
Curvature	Courboure	التقوس
Curves	Courbes	منحنيات
closed	« fermées	« مغلقة
equivalent	« équivalentes	« متكافئة
open	« ouvertes	« مفتوحة
oriented	« orientées	« موجهة
plane	« planes	« مستوية
sectionally smooth	Contours	« صقيلة جزئيا
simple	Courbes simples	« بسيطة
smooth	———	« صقيلة
space	« gauches	« فراغية
Degree	Degré	درجة
Dependent	Dépendant	مرتبط ـــ غير مستقل
linearly	linéairement	مرتبط خطيا
Derivative	Dérivée	مشتـــق
directional	« dans une direction	« موجه
ordinary	« ordinaire	« عادي
partial	« partielle	« جزئي
total	« totale	« كلي
Determinant	Déterminant	المعـــين
functional	« fonctionnel	« التابعي
minors of	mineurs de	صغار المعين

الانكليزية	الافرنسية	العربيــــة
Differential	Différentielle	التفاضل
exact	« exacte	» التام
Differential equations	Équations différentielles	معادلات تفاضلية
exact	« exactes	» » تامة
homogeneous	« homogènes	» » متجانسة
linear	« linéaires	» » خطية
ordinary	« ordinaires	» » عادية
partial	« aux dérivées partielles	» » جزئية
system of	système d'	جملة معادلات تفاضلية
Diffusivity	Diffusion	الانتشار
Direction	Direction	التوجيه ـــ الاتجاه
Displacement	Déplacement	الازاحة
Domain	Domaine	نطـــاق
multiply connected	« multiplement connex	» متعدد الاتصال
simply connected	« simplement connex	» بسيط الاتصال
Electrodynamics	Électrodynamique	الكهرباء الحركية
Electromagnetism	Électromagnétisme	الكهرطيسية
Electrostatics	Électrostatique	الكهرباء الساكنة
Element	Élément	العنصـــر
oriented	« orienté	» الموجه
imaginary	« imaginaire	» التخيلي
Element of area	Élément d'aire	عنصر المساحة

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Element of length	« de longeur	» الطول
Element of volume	« de volume	» الحجم
Ellipsoid	Ellipsoïde	مجسم القطع الناقص
Equations	Équations	معادلات
algebraic	« algébriques	» جبرية
characteristic	« caractéristiques	» مميزة
Expansion	Développement	النشـــر
finite	« fini	» المنتهي
infinite	« infini	» غير المنتهي
Extremum	Maximum, minimum	نهاية حدية
conditional	« conditionnel	» » مقيدة
relative	« relatif	» » نسبية
Factor	Facteur	عامــل
damping	« amortissent	» التخامد
integrating	« intégrant	» تكميل
Field	Corps commutatif - champ	حقــل
fluid	Fluide	مائــع
compressible	« compressible	» قابل للانضغاط
ideal	« parfait	» مثالي
Function	Fonction	تابــع
analytic	« analytique	» تحليلي
arbitrary	« arbitraire	» اختياري
bounded	« bornée	» محدد

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
circular	« circulaire	دائري »
complementary	« complémentaire	مكمل »
complex	« complexe	عقدي »
conjugate	« conjuguée	مترافق »
continuous	« continue	مستمر »
differentiable	« dérivable	قابل للاشتقاق »
elementary	« élémentaire	ابتدائي »
explicit	« explicite	صريح »
harmonic	« harmonique	توافقي »
hyperbolic	« hyperbolique	قطعي »
implicit	« implicite	مستتر »
inverse	« réciproque	عكسي »
potential	« potentielle	الكمون »
primitive	« primitive	أصلي »
rational algebraic	« algébrique rationnelle	كسري جبري عادي »
real	« réelle	حقيقي »
scalar	« scalaire	عددي »
sectionally continuous	———	مستمر جزئيا »
vector	« vectorielle	شعاعي »
Geometry	Géométrie	هندسة

العربيـــة	الافرنسية	الانكليزية
» تحليلية	« analytique	analytic
» شعاعية	« vectorielle	vector
تـــدرج	Gradient	Gradient
متجانس	Homogène	Homogeneous
مجسم القطع الزائد	Hyperboloïde	Hyperboloid
الصورة	Image	Image
» العكسية	« réciproque	inverse
تخيلـــي	Imaginaire	Imaginary
تزايـــد	Incrément	Increment
التحريض	Induction	Induction
مستقـــل	Indépendant	Independent
» خطيا	Lineairement indépendant	linearly
عطالـــة	Inertie	Inertia
عزم العطالة	« moment d'	moment of
تكاملات	Intégrales	Integrals
» ثنائية	« doubles	double
» شاذة	« généralisées	improper
» متتالية	————	iterated
» خطية	« curvilignes	line
» بسيطة	« simples	simple
» سطحية	« de surfaces	surface
» ثلاثية	« triples	triple
» حجمية	« de volumes	volume

الانكليزية	الافرنسية	العربيــــة
Interval	Intervalle	مجـــال
Inversion	Inversion	الانعكاس
Isotropic	Isotrope	تعادلي الخواص
Jacobian	Jacobien	اليعقوبي
Line	Ligne - droite	خط منحن أو مستقيم
binormal	Droite binormale	الناظم الثنائي
branch	« de ramification	مستقيم التفرع
normal	« normale	مستقيم ناظم
stream	Ligne de courant	خط الجريان
tangent	Droite tangente	مستقيم مماس
vortex	Ligne de rotation	خط الاعصار
Mapping	Application	تطبيــق
bijective	Bijection	تقابــل
conformal	Application conforme	تطبيق مطابق
inverse	« réciproque	تطبيق عكسي
Matrix	Matrice	المصفوفة
Maximum	Maximum	نهاية عظمى
Minimum	Minimum	نهاية صغرى
Modulus	Module	طويلة ـــ مطلق
Neighbourhood	Voisinage	الجـــوار
Number	Nombre	عـــدد
complex	« complex	« عقدي
imaginary	« imaginaire	« تخيلي

الانكليزية	الافرنسية	العربيــة
rational	« rationnel	« عادي
real	« réel	« حقيقي
Operator	Opérateur	مؤثــر
differential	« différentiel	« اشتقاقي
integral	« intégral	« تكاملي
Hamiltonian	« Hamiltonien	« هاميلتون
Laplacian	« Laplacien	« لابلاس
Order	Ordre	مرتبــة
Oscillation	Oscillation	اهتزاز
amplitude of	amplitude d'	سعة الاهتزاز
damped	« amortisée	اهتزاز متخامد
forced	« forcée	« قسري
free	« libre	« حــر
period of	période d'	دور الاهتزاز
simple	« simple	اهتزاز بسيط
Paraboloid	Paraboloïde	مجسم القطع المكافىء
elliptic	« elliptique	« « « الناقصي
hyperbolic	« hyperbolique	« « « الزائدي
Parameters	Paramètres	وسطاء
variation of	variation des	تغيير الوسطاء
Part	Partie	الجــزء
analytic	« analytique	« التحليلي
imaginary	« imaginaire	« التخيلي

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
principal	« principale	« الرئيسي
real	« réelle	« الحقيقي
Partition	Partition	التجزئة
Pencils	Faisceaux	الحـــزم
Permeability	Perméabilité	النفوذية
Permutation	Permutation	التبديـــل
Phase	Phase	الطـــور
Plane	Plan	المستوي
complex	« complexe	« العقدي
osculating	« osculateur	« الملاصق
tangent	« tangent	« المماس
Point	Point	نقطـــة
branch	« de ramification	« تفـــرع
boundary	« frontière	« محيطية
critical	« critique	« حرجة
exterior	« extérieur	« خارجية
interior	« intérieur	« داخلية
limit	« d'accumulation	« نهاية
multiple	« multiple	« متعددة
ordinary	« régulier	« عادية
saddle	————	« تسرج
singular	« singulier	« شاذة

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Point set	Ensemble de points	مجموعة نقطية
arcwise connected	————	مجموعة نقطية متصلة قوسيا
bounded	« borné	« نقطية محددة
closed	« fermé	« « مغلقة
closure of	————	مجموعة الاغلاق
diameter of	diamètre d'	قطر المجموعة
open	« ouvert	مجموعة نقطية مفتوحة
subset of	sous-ensemble d'	مجموعة جزئية
Pole	Pôle	القطـــب
Position	Position	موضـــع
function of	Fonction de points	تابع للموضع ــ تابع نقطي
Potential	Potentiel	الكمـــــون
scalar	« scalaire	« العددي
vector	« vecteur	« الشعاعي
Product	Produit	الجداء
inner	« intérieur	« الداخلي
mixed	« mixte	« المختلط
outer	« extérieur	« الخارجي
vector	« vectoriel	« الشعاعي
Projection	Projection	المسقط
Region	Région	منطقة
simple	« simple	« بسيطة
sub-	sous-	« جزئية

الانكليزية	الافرنسية	العربية
two - dimensional	« du plan	« مستوية
three - dimensional	« de l'espace	« فراغية
Residue	Résidu	الراسب
Resonance	Résonance	الطنين
Sector	Secteur	قطاع
Series	Séries	سلسلة
convergent	« convergentes	« متقاربة
divergent	« divergentes	« متباعدة
finite	« finies	« منتهية
functional	« de fonctions	« تابعية
infinite	« infinies	« غير منتهية
numerical	« numériques	« عددية
power	« entières	« صحيحة
Singular point	Point singulier	نقطة شاذة
essential	« essentiel	« « أساسية
isolated	« isolé	« « منعزلة
removable	————	« « تمكن ازالتها
Solution	Solution	الحل
general	« générale	« العام
particular	« particulière	« الخاص
Space	Espace	الفراغ
dimensions of	dimensions d'	أبعاد الفراغ
Euclidean	« Euclidien	الفراغ الاقليدي

الانكليزية	الافرنسية	العربيـــة
Vector	« vectoriel	« الشعاعي
State	Régime	الحالة
steady	« permanent	« المستقرة
transient	« transitoire	« العارضة
Surface	Surface	سطح
algebraic	« algébrique	« جبري
closed	« fermée	« مغلق
level	« de niveau	« السوية
open	« ouverte	« مفتوح
oriented	« orientée	« موجه
sectionally smooth	————	« صقيل جزئيا
simple	« simple	« بسيط
smooth	————	« صقيل
Symmetry	Symétrie	تناظر
axial	« axiale	« محوري
axis of	axe de	محور تناظر
radial	« radiale	تناظر مركزي
Torsion	Torsion	الالتفاف
Transformation	Transformation	تحويل
Undetermined coefficients	Coefficients indeterminés	أمثال غير معينة
Value	Valeur	القيمـــة
principal	« principale	« الاساسية
Variable	Variable	متحول

الانكليزية		الافرنسية	العربيــــة
complex	«	complexe	» عقدي
dependent	«	dépendante	» غير مستقل
independent	«	indépendante	» مستقل
real	«	réelle	» حقيقي
Vector		Vecteur	شعاع
components of		composants du	مركبات الشعاع
direction of		direction du	اتجاه الشعاع
free	«	libre	شعاع طليق
line of		support de	منحى الشعاع
modulus of		module de	طويلة الشعاع
position		————	شعاع الموضع
unit	«	unitaire	شعاع التوجيه
Vector function		Fonction vectorielle	تابع شعاعي
circulation of		circulation de	جولان التابع الشعاعي
lamellar(irrotational)	«	lamellaire	التابع الشعاعي الكموني (غير الاعصاري)
divergence of		divergence de	تفرق التابع الشعاعي
flux of		flux de	تدفق التابع الشعاعي
rotation of		rotationnel de	دوران التابع الشعاعي
solenoidal	«	solénoïdale	التابع الشعاعي اللولبي

المـــراجـــع

1 - Advanced calculus (1963) M. R. Spiegel (Schaum)

2 - Advanced calculus for applications (1964)
F. B. Hildebrand (Prentice - Hall).

3 - Advanced vector analysis (1957)
C.E. Weatherburn (G. Bell & sons)

4 - Analytic geometry of three dimensions (1947)
D. M. Y. Sommerville (Cambridge University Press)

5 - A course of mathematical analysis, Volume 1 , 2 (1977)
S. M. Nikolsky (Mir)

6 - A first course in real analysis (1978)
M. H. Protter, C. B. Morrey (Springer - Verlag)

7 - Compléments de Mathématiques (1965)
A. Angot (C. N. E. T)

8 - Complex variables (1964) M. R. Spiegel (Schaum)

9 - Concepts of calculus, Volume II (1966)
A. Lightstone (Harper International)

10 - Differential and Integral Calculus, Volume II (1964)
R. Courant (Blackie & Son)

11 - Differential and Integral calculus (1974) N. Piskunov (Mir)

12 - Differential equations (1956) H. Piaggio (G. Bell & sons)

13 - Differential equations (1952) F. Ayre (Schaum)

14 - Differential geometry (1969) M. M. Lipschutz (Schaum)

15 - Electromagnetic theory (1956) V. C. A. Ferraro (Athlone Press)

16 - Elementary vector analysis (1956)
C. E. Weather burn (G. Bell & sons)

17 - Functions of several variables (1977)
W. Fleming (Springer - Verlag)

18 - Mathématiques génerales (1966)
C. Pisot, M. Zamansky (Dunod)

19 - Multiple integrals, field theory and series (1973)
B. M. Budak, S. V. Fomin (Mir)

20 - Problems in mathematical analysis (1973)
Editor B. Demidovich (Mir)

21 - Problems in analytic geometry (1969)
D. Kletenik (Mir)

22 - Theory of functions of a complex variable (1955)
E.T. Copson (Oxford - Clarendon Press)

الفهرس

الباب الاول

التحليل الشعاعي

الموضوع	رقم الصفحة

الموضوع	رقم الصفحة

الموضوع	رقم الصفحة

جامعة دمشق

مديرية الكتب الجامعية

صدر بإشراف لجنة الانجاز

سعر المبيع للطالب ١٠٠ ل.س

مطبعة جامعة دمشق